0 L.Ali Bourguiba Kalaa Kébira Pof :Abdesslem raoudha Le 31 /5 / 2011	Classes : 3 T $_{1,2}$ Durée :3 H
	DEVOIR DE SYNTHESE N ° 3

Exercice 1 : (4 points)

Cocher la bonne réponse

1)Soit $U_n = -4\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$, (U_n) a pour limite :	a) $-\infty$	b)0	c) $+\infty$
2)Soit $V_n = n - \frac{1}{n}$, $n \in IN^*$, (V_n) est :	a)croissante	b)décroissante	c)constante
3)Soit $W_n = \frac{3n+4}{10}$, $n \in IN$, (W_n) est une suite :	a)arithmétique	b)géométrique	c)constante
4)Dans le développement de $(x+1)^8$, le coefficient de x^5 est :	a)35	b)56	c)70
5)Le nombre C_n^2 (n ∈IN , n > 2)) est égal à :	a)$\frac{n}{2}$	b)$\frac{n!}{2!}$	c)$\frac{n(n-1)}{2}$
6)Le nombre A_n^{n-1} (n ∈ IN*) est égal à :	a)n	b)1	c)n!
7)A et B sont deux évènements incompatibles , alors :	a)p(A)= 1 – p(B)	b)p(A∪B) = p(A)	c)p(A∪B) = p(A) +p(B)
8)On lance trois dés différents dont les faces de chacun sont numérotées 1, 2 , 3 , 4 ,5 et 6 . Il y a :	a)A_6^3 résultats	b)C_6^3 résultats	c)6^3 résultats

Exercice 2 : (4 points)

Une urne contient **10 boules** indiscernables au toucher : **5 rouges** , **4 noires** et **1 blanche**

1)On tire **simultanément 4 boules** de l'urne. Déterminer la probabilité de chacun des évènements :

A « Obtenir la boule blanche »

B « Obtenir 4 boules de même couleur »

C « Obtenir au moins une boule rouge »

D « Obtenir 2 couleurs »

2)On tire **successivement et avec remise 4 boules** de l'urne . Déterminer la probabilité de chacun des évènements :

E « Obtenir 4 boules de même couleur »

F « Obtenir 2 boules rouges et 2 boules noires »

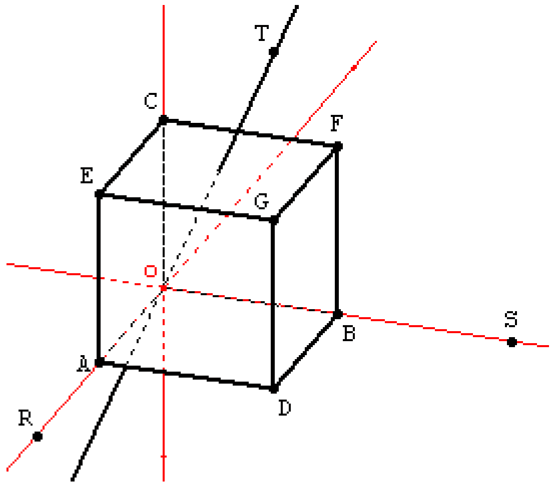
G « La boule blanche est tirée pour la première fois au $3^{\text{ième}}$ tirage »

Exercice 3 :(6 points)

Soit le **cube** **OADBCEGF** et soit les points R , S , T vérifiant $\overrightarrow{OR} = 2\,\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{DT} = 2\overrightarrow{DG}$

1)a)Montrer que $\overrightarrow{RD} = \overrightarrow{AB}$ et que D est le milieu de [R S]

b)Montrer que $\overrightarrow{RS} = 2\,\overrightarrow{EF}$, en déduire la position de (EF) et (RS)



On considère maintenant le repère orthonormé **$(O , \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC})$**

2)a) Montrer que R (2 , 0 , 0) , S (0 , 2 , 0) et T (1 , 1 , 2)

b)vérifier que C , R et S sont non alignés

3)a)Soit le plan **P = (CRS)** , montrer que **P : x + y + 2 z - 2 = 0**

b)Montrer que **(OT)** $\perp$ **P**

c)La droite (OT) coupe P en H , déterminer les coordonnées de H

d)Déterminer de deux manières différentes la distance de O à P

4)Soit **Q le plan passant par C et de vecteur normal** $\overrightarrow{n_Q} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

a)Ecrire une équation cartésienne de Q

b)Montrer Q $\perp$ P et que Q $\cap$ P = (R C)

Exercice 4 : (6 points)

Soit la suite réelle (U_n) définie par : **$U_0 = 4$** et pour tout n $\in$ IN , **U_{n+1}** = $\dfrac{4U_n + 2}{U_n + 3}$ et soit **V_n** = $\dfrac{U_n - 2}{U_n + 1}$

1)Soit f (x) = $\dfrac{4x+2}{x+3}$, x $\in\ ]-3 , +\infty[$. On note **C** sa représentation graphique dans un repère orthonormé et **D : y = x**

a)Calculer f ’(x) et dresser le tableau de variation de f

b)Tracer **C** et **D** dans le même repère

c)**En utilisant C et D** , placer les 4 premiers termes de la suite sur l’axe des abscisses

Que peut on conjecturer pour la monotonie et la convergence de (U_n)

2)a)Montrer par récurrence que pour tout n , $U_n \geq 2$

b)Montrer que $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-(U_n+1)(U_n-2)}{U_n+3}$. Déduire le sens de variation de (U_n)

3) a)Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

b)Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c)Calculer les limites de (V_n) et (U_n)

Correction :

Exercie 1 :

1	2	3	4	5	6	7	8
b	a	a	b	c	c	c	c

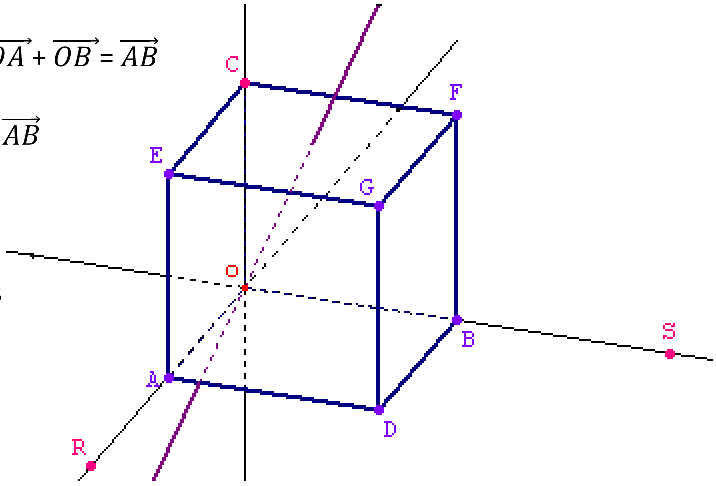
Exercice 2 :

1)p(A) $=\frac{C_1^1 C_9^3}{C_{10}^4} = \frac{84}{210}$, p(B) = $\frac{C_4^4 + C_5^4}{210} = \frac{6}{210}$, p(C) = 1 - p($\overline{C}$) = 1 - $\frac{C_5^4}{210} = \frac{115}{210}$,

p(D) = $\frac{C_5^2\, C_4^2 + C_5^3\, C_4^1 + C_5^1\, C_4^3 + C_5^3\, C_1^1 + C_4^3\, C_1^1}{210} = \frac{134}{210}$ (2R2N ou 3R1N ou 1R3N ou 3R1B ou 3N1B)

2)p(E) = $\frac{5^4+4^4+1^4}{10^4} = \frac{882}{10000} = \frac{441}{5000}$, p(F) = $6\frac{5^2\, 4^2}{10000} = \frac{6}{25}$, p(G) = $\frac{9.9.1.10}{10000} = \frac{81}{1000}$

Exercice 3 :



1)a)$\overrightarrow{RD} = \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{RO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = - 2\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

de même $\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} + 2\,\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

on déduit que $\overrightarrow{RD} = \overrightarrow{DS}$ et par suite D est le milieu de [RS]

b)$\overrightarrow{RS} = 2\,\overrightarrow{RD} = 2\,\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{EF}$ donc (EF) et (RS) sont parallèles

2)a)OR = 2 OA donc R (2,0,0) ,OS = 2 OB donc S(0,2,0)

On D(1 , 1 , 0) et G(1 , 1 , 1)et on pose D (x , y , z) ,

$\overrightarrow{DT} = 2\,\overrightarrow{DG}$ eq $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où T(1,1,2)

b) On a $\overrightarrow{CR}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CS}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc $\overrightarrow{CR}$ et $\overrightarrow{CS}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points C , R et S ne sont pas alignés

3)a)M(x , y , z) ∈ (CRS) eq $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CR}$ et $\overrightarrow{CS}$ sont coplanaires eq det ($\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CR}$, $\overrightarrow{CS}$) = 0

eq $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 0 & 2 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ eq 2x + 2y + 4z - 4 = 0 eq **x + y + 2z - 2 = 0**

b)on a $\overrightarrow{OT}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à (CRS) donc (OT) ⊥ (CRS) , (OT) : $\begin{cases} x = \propto + 1 \\ y = \propto + 1 \qquad (\propto \in IR) \\ z = 2 \propto + 2 \end{cases}$

c)H(x , y , z) ∈ (OT) ∩ (CRS) eq : $\begin{cases} x = \propto + 1 \\ y = \propto + 1 \\ z = 2 \propto + 2 \end{cases}$ et x + y + 2z - 2 = 0 eq : $\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 1 \\ z = 2\alpha + 2 \end{cases}$ et $(\alpha + 1) + (\alpha + 1) + 2(2\alpha + 2) - 2 = 0$

eq $\alpha = \frac{-2}{3}$, $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$ donc $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$d(O,P) = \frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ et d'autre part $d(O,P) = OH = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

4)a)Q : $x - 5y + 2z + d = 0$ et $C \in Q$ donc $2 + d = 0$ donc $d = -2$ donc Q : $x - 5y + 2z - 2 = 0$

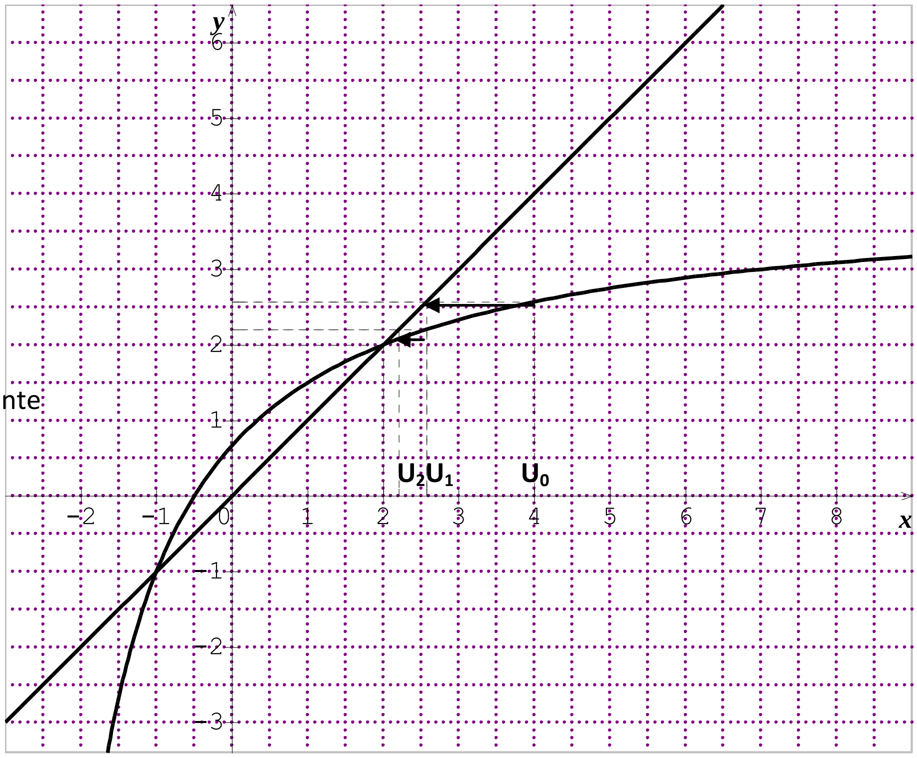
b)$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P} = 1 - 5 + 4 = 0$ donc $Q \perp P$; $(RC) \subset P$ et $(RC) \subset Q$ (car $2 - 0 + 0 - 2 = 0 \Longrightarrow R \in Q$ et $0 - 0 + 2 - 2 = 0 \Longrightarrow C \in Q$)

Exercice 4 :

1)a)$f'(x) = \frac{10}{(x+3)^2} > 0$ d'où

x	-3	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	4

b)



c)Il parait que (U_n) est décroissante et convergente

2)a)* pour $n = 0$, $U_0 = 4 \geq 2$

*On suppose $U_n \geq 2$ et montrons que $U_{n+1} \geq 2$

On a $U_{n+1} - 2 = \frac{2(U_n - 2)}{U_n + 3} \geq 0$ car $U_n \geq 2$

donc $U_{n+1} \geq 2$

Conclusion : pour tout $n \in IN$, $U_n \geq 2$

b)$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n+2}{U_n+3} - \frac{U_n(U_n+3)}{U_n+3} = \frac{-(U_n)^2+U_n+2}{U_n+3} = \frac{-(U_n+1)(U_n-2)}{U_n+3} \leq 0$ ($car\ U_n \geq 2$) donc (U_n) est décroissante

3)a)$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}+1} = \frac{\frac{4U_n+2}{U_n+3}-2}{\frac{4U_n+2}{U_n+3}+1} = \frac{(4U_n+2)-2(U_n+3)}{(4U_n+2)+(U_n+3)} = \frac{2(U_n-2)}{5(U_n+1)} = \frac{2}{5}V_n$ Donc (Vn) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$

b)$V_n = V_0 \cdot q^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

$V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$ eq $V_n(U_n + 1) = U_n - 2$ eq $V_n U_n + V_n = U_n - 2$ eq $U_n(V_n - 1) = -V_n - 2$ eq $U_n = \frac{-V_n-2}{V_n-1}$ d'où $U_n = \frac{-2-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{-1+\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}$

c)$\lim V_n = 0$ car $-1 < \frac{2}{5} < 1$ et $\lim U_n = \frac{-2-0}{-1+0} = 2$