

Exercice n° 1:

$f$  est une fonction définie sur  $] -2, 2[$  par :  $f(x) = \frac{1-2x}{x-2}$  et est représentée ci-dessous . Dans cet exercice , la 1<sup>ière</sup> partie et la 2<sup>ième</sup> partie sont indépendantes .

1<sup>ière</sup> partie :

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 1$  et que  $u$  est décroissante

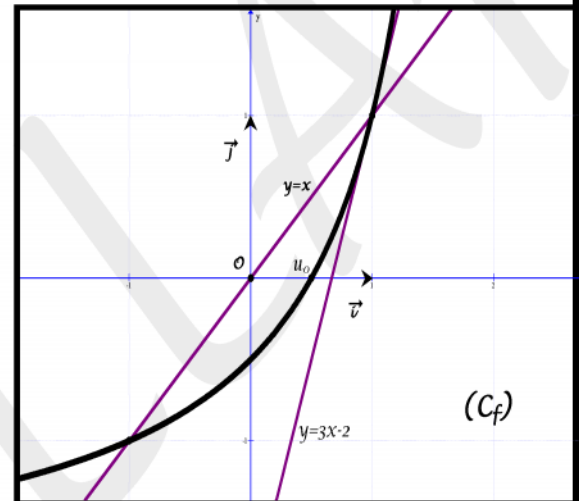
2) Dédire que  $u$  converge et déterminer sa limite .

3) Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $v_n = \frac{1+u_n}{1-u_n}$

a) Montrer que  $v$  est géométrique de raison  $\frac{1}{3}$

b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et retrouver sa limite .

c) Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$  . Déterminer  $n$  pour que :  $S_n = \frac{211}{54}$

2<sup>ième</sup> partie :

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left] \frac{1}{2}, 2 \right[$  par :  $g(x) = -\ln(f(x))$  et  $(C_g)$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ,

1) Justifier que :  $\forall x \in \left] \frac{1}{2}, 2 \right[ , g'(x) < 0$  . Dresser le tableau de variation de  $g$  .

2) Calculer  $g(1)$  et vérifier que  $g'(1) = -3$  . Dédire une équation de la tangente  $T$  à  $(C_g)$  au point d'abscisse 1

3) a) Montrer que  $g(x) = x$  admet dans  $\left] \frac{1}{2}, 2 \right[$  une solution unique  $\alpha \in \left] \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \right[$  .

b) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  . Construire  $(C_g)$  ,  $T$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  .

4) a) Montrer que  $F(x) = (x-2)\ln(x-2) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(2x-1)$  est une primitive de  $g$  sur  $\left] \frac{1}{2}, 2 \right[$  .

b) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine limité par  $(C_g)$  ,  $(O, \vec{e}_1)$  et les droites d'équations :  $x = 1$  et  $x = \alpha$  .

c) Dédire l'aire  $\mathcal{A}'$  du domaine limité par  $(C_g)$  ,  $(C_{g^{-1}})$  et les axes du repère .

Exercice n° 2:

Soit la fonction  $h$  définie sur  $\left] 0, \frac{1}{e} \right]$  par :  $h(x) = x \ln(x)$  et la suite  $(t_n)_{n \geq 4}$  définie par :  $t_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} h(x) dx$  .

1) a) Dresser le tableau de variation de  $h$  . Dédire que :  $\forall n \geq 4, h\left(\frac{1}{n}\right) \leq h(x) \leq h\left(\frac{1}{n+1}\right)$  .

b) Montrer que :  $\forall n \geq 4, \frac{\ln(n+1)}{n(n+1)^2} \leq t_n \leq \frac{\ln(n)}{(n+1)n^2}$  . Dédire la limite de  $(t_n)$  .

2) a) Soit  $\forall n \geq 4, I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 h(x) dx$  . A l'aide d'une intégration par parties , calculer  $I_n$

b) Calculer  $S_n = \int_{\frac{1}{4}}^1 h(x) dx + (t_4 + t_5 + \dots + t_{n-1})$  ,  $\forall n \geq 4$  .  $(S_n)$  est-elle convergente ?

*Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et la bonne présentation de la copie*