

DEVOIR DE CONTROLE N3

Exercice1 : (4 points)

Répondre par vrai ou faux

- 1) soit $z = 2i - 3$ on a $\bar{z} = 3 - 2i$
- 2) soit $z = -1 - i$ on a $|z^8| = 16$
- 3) soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{4}$, on a $z^{12} = -1$
- 4) soit z un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{6\pi}{4}$ alors z est imaginaire pur
- 5) soit z un nombre complexe d'argument $\frac{-\pi}{6}$ et ayant une partie réelle égale à $4\sqrt{3}$ alors $|z| = 8$
- 6) soit z un nombre complexe, on a $|z + 1 - i| = |\bar{z} + 1 + i|$
- 7) z et z' étant deux nombres complexes si $|z| = |z'|$ alors $z = z'$
- 8) z et z' étant deux nombres complexes on a toujours $|z + z'| = |z| + |z'|$

Exercice 2 : (5.5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct

Soit les points A, B et C d'affixes respectives $-i$, $\sqrt{3} + i$ et $-\sqrt{3} + i$

- 1) Placer les points A, B et C sur la figure
- 2) a) Déterminer les affixes du point I milieu de [BC] et du point D tel que ACDB soit un parallélogramme
b) Montrer que ACDB est un losange
- 3) a) Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes $-i$, $\sqrt{3} + i$ et $-\sqrt{3} + i$
b) Déterminer une mesure de (\vec{OB}, \vec{OC})

Exercice 3 : (3.5 points)

Soit $f(x) = -2 \sin(2\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$

- 1) Justifier qu'on peut étudier f sur $[0, \frac{1}{2}]$
- 2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \frac{1}{2}]$
- 3) Représenter f sur $[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}]$ dans un repère orthonormé
- 4) a) Montrer que la droite $D : x = \frac{1}{4}$ est un axe de symétrie pour C_f
b) Montrer que le point $A(\frac{1}{2}, 0)$ est un centre de symétrie pour C_f

Exercice 4 : (7 points)

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ et $g(x) = x^4 + x^2 + 2$

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé

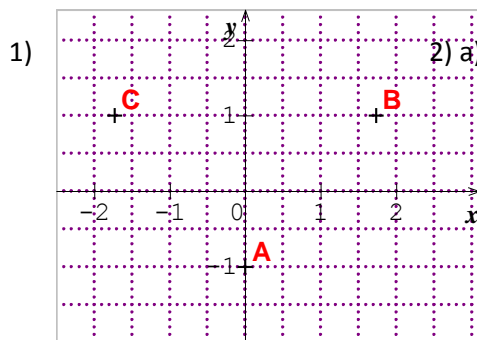
- 1) a) Étudier les variations de g
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus
c) tracer sa courbe C_g dans un repère orthonormé
- 2) a) Préciser le domaine de définition de f
b) Montrer que la droite $D : y = x + 1$ est une asymptote à C_f et préciser la position de C_f par rapport à D
c) montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 + 1)^2}$ et dresser le tableau de variation de f
d) Tracer C_f
e) Montrer que $f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}$ et déterminer les points d'inflexion de C_f
- 3) Tracer dans le même repère la courbe de h où $h(x) = |f(x)|$

Correction :

Exercice 1 :

- 1) Faux ($\bar{z} = -2i - 3$)
- 2) Vrai ($|z| = \sqrt{2}$ donc $|z^8| = |z|^8 = 16$)
- 3) Vrai ($z^{12} = [1, 12 \frac{\pi}{4}] = [1, 3\pi] = -1$)
- 4) Vrai ($z = [\sqrt{2}, \frac{3\pi}{2}] = -\sqrt{2}i$)
- 5) Vrai (on sait que $x = r \cos \theta$ et $4\sqrt{3} = 8 \frac{\sqrt{3}}{2}$)
- 6) Vrai ($|z + 1 - i| = |\overline{z + 1 - i}| = |\bar{z} + \overline{1 - i}| = |\bar{z} + 1 + i|$)
- 7) Faux (par exemple $|1| = |i|$ mais $1 \neq i$)
- 8) Faux (par exemple $|1 + i| \neq |1| + |i|$)

Exercice 2 :



2) a) $\text{aff}(I) = i$, $\text{aff}(D) = 3i$

b) ACDB est un parallélogramme et $AC = AB = \sqrt{7}$ donc ACDB est un losange

3) a) $-i = 1(\cos(\frac{-\pi}{2}) + i \sin(\frac{-\pi}{2}))$

$$\sqrt{3} + i = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}))$$

$$-\sqrt{3} + i = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{5\pi}{6}))$$

$$\text{b) } (\text{OB}, \text{OC}) = \arg(\frac{z_C}{z_B}) = \arg(z_C) - \arg(z_B) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Exercice 3

1) f est impaire et périodique de période 1 donc on peut étudier f sur $[0, \frac{1}{2}]$

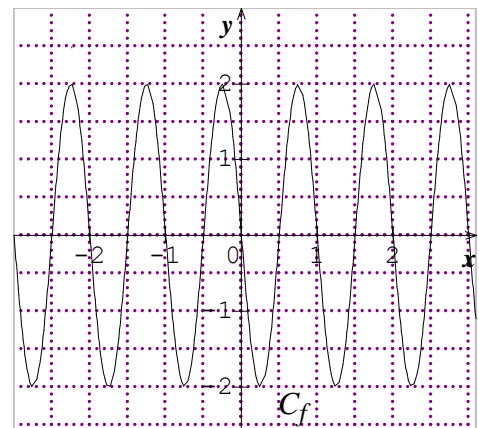
$$2) f'(x) = -4\pi \cos 2\pi x$$

$$f'(x) = 0 \text{ eq } 2\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ eq } x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$$

dans $[0, \frac{1}{2}]$, $x = \frac{1}{4}$ d'où

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
f'(x)		-	0	+
f(x)	0			

3)



4) a) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2(1/4) - x \in \mathbb{R}$ et $f(2(1/4) - x) = -2 \sin(\pi - 2\pi x) = -2 \sin(2\pi x) = f(x)$

b) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2(1/2) - x \in \mathbb{R}$ et $f(2(1/2) - x) + f(x) = -2 \sin(2\pi - 2\pi x) - 2 \sin 2\pi x = 2 \sin(2\pi x) - 2 \sin(2\pi x) = 0$

Exercice4 :

1)a) $g'(x) = 4x^3 + 2x = x(4x^2 + 2)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	\searrow 2 \nearrow	$+\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

donc Cg Admet deux branches paraboliques au voisinage

de $-\infty$ et $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées

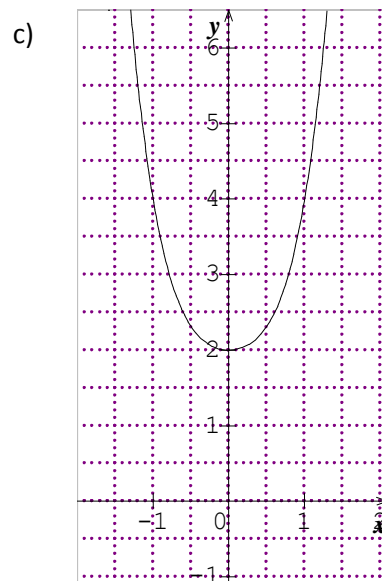
2)a) Df = IR

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc D: $y = x + 1$ est une asymptote à Cf

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (x+1)$	-	0	+
Position de Cf et D	Cf au dessous de D		Cf au dessus de D

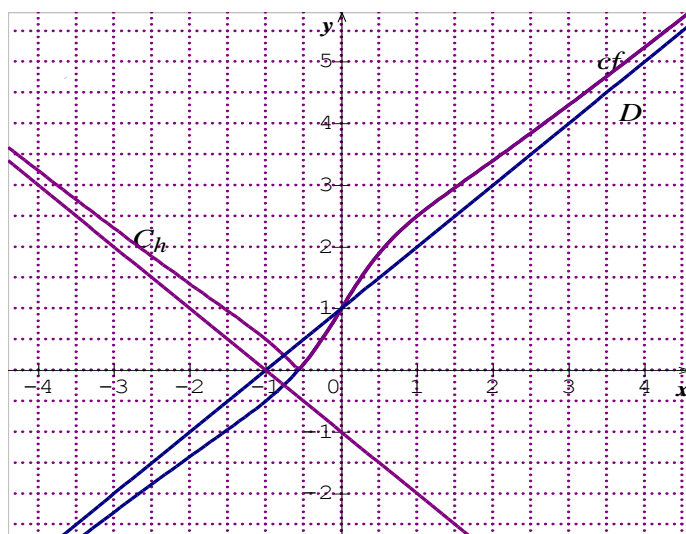
Cf et D se rencontrent



c)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

d)



e) $f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - 4x(x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}$

$f''(x) = 0$ eq $x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$