CALCUL INTEGRAL

I) Introduction: Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

f est une fonction continue croissante et positive sur $[a;b]$
L'unité d'aire est définie par le parallélogramme
formé par le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
Pour tout réel x de $[a;b]$,
on considère l'aire (notée A(x)) de la partie hachurée

1)a) Illustrer sur la figure le nombre A(x+h)-A(x) , pour h réel strictement positif (tel que x+h < b)

b) Expliquer graphiquement pourquoi: $h.f(x) \le A(x+h)-A(x) \le h.f(x+h)$

c)i) Déduire de ce qui précède que: $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$

ii) On montrerait de même que: $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$

d) Conclusion: La fonction: $x \mapsto A(x)$, est dérivable en tout point x de $[a;b]$ et A'(x) =
est la primitive de f sur $[a;b]$, qui

2) Remarques: a) L'ensemble D des points M(x;y) du plan tels que: $a \le x \le b$ et $0 \le y \le f(x)$
est le « domaine plan » limité par: l'axe (Ox) , le graphe de f ,
et les droites d'équations:
A(a) = ; A(b) =

b) Soit F une autre primitive de f sur $[a;b]$
Ecrire A(x) en fonction de F(x)
En remarquant que l'aire de D est égale à: A(b) - A(a) , en déduire que:
l'aire de D est égale à: F(b) - F(a)

On retiendra: f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$
F est une primitive de f sur $[a;b]$
L'aire (en u.a.) du domaine plan limité par
l'axe (Ox) , le graphe de f , et les droites d'équations: x = a et x = b est

3) Exemples: 1) Déterminer l'aire du domaine $D = \{M(x;y)/\ 0 \le x \le 2 \text{ et } 0 \le y \le x^2\}$

2) Déterminer l'aire du domaine $D = \left\{M(x;y)/\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \text{ et } 0 \le y \le \cos x\right\}$

4) On admet: i) Ce qui vient d'être montré pour une fonction continue croissante et positive sur $[a;b]$
est également valable pour toute fonction continue et positive sur $[a;b]$
donc que toute fonction continue et positive sur $[a;b]$ admet une primitive sur $[a;b]$

ii) Toute fonction continue sur $[a;b]$ admet une primitive sur $[a;b]$

II) Intégrale d'une fonction continue sur un segment:

1) Définition: f est une fonction continue sur $[a;b]$, soit F une primitive de f sur $[a;b]$

Le nombre $F(b) - F(a)$ (noté: $[F(t)]_a^b$) , est indépendant de la primitive F choisie,

on le note: $\int_a^b f(t)dt$ (ou $\int_a^b f(u)du$ etc.) ; on l'appelle l'intégrale de f sur $[a;b]$

On retiendra: f est une fonction continue sur $[a;b]$; F est une primitive de f sur $[a;b]$

L'intégrale de f sur $[a;b]$: $\int_a^b f(t)dt =$ $= [F(t)]_a^b$

2) Remarques: a) f est une fonction continue sur $[a;b]$

La fonction: $x \mapsto \int_a^x f(t)dt =$ $=$ définie sur $[a;b]$

est la primitive de f sur $[a;b]$, qui s'annule pour $x = a$

b)i) Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt$ est

ii) Si f est négative sur $[a;b]$

Alors $-f$ est sur $[a;b]$

Alors l'aire du domaine plan limité par l'axe (Ox) , le graphe de f , et les droites d'équations: $x = a$ et $x = b$ est: $\int_a^b$ $=$

$=$

$=$

$= -\int_a^b f(t)dt$

3) Exercices: 1) Déterminer l'aire du domaine $D = \left\{ M(x;y) /\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 \leq y \leq \cos x \right\}$

2) Déterminer l'aire du domaine $D = \left\{ M(x;y) /\ 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \right\}$

3) Déterminer l'aire du domaine $D = \left\{ M(x;y) /\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 - 1 \leq y \leq 0 \right\}$

4) Propriétés de l'intégrale:

a) Relation de Chasles:

f est une fonction continue sur $[a;b]$; F est une primitive de f sur $[a;b]$; $c \in [a;b]$

$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt =$ $+$ $=$ $= \int_a^b f(t)dt$

Remarque: On pose: $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ ainsi on retrouve: $\int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt =$ $=$

b)i) f et g sont des fonctions continues sur $[a;b]$; F et G sont des primitives de f et g sur $[a;b]$

$\int_a^b (f+g)(t)dt =$ $=$ $=$ $= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

ii) k est un réel

$\int_a^b k.f(t)dt =$ $=$ $= k.\int_a^b f(t)dt$

iii) Aire du domaine plan compris entre deux graphes :

f et g sont des fonctions continues sur $[a;b]$, telles que $f \geq g$ sur $[a;b]$

Il existe un réel β tel que: $f+\beta$ et $g+\beta$ sont deux fonctions positives sur $[a;b]$

L'aire du domaine plan compris entre deux graphes est:

$\int_a^b (f(t)+\beta)dt - \int_a^b (g(t)+\beta)dt =$

$= \int_a^b (f(t)-g(t))dt$

c)i) f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$ $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

ii) f et g sont des fonctions continues sur $[a;b]$, telles que $f \geq g$ sur $[a;b]$

f - g est une fonction continue et positive sur $[a;b]$ donc:

donc:

donc: $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$

On retiendra: f et g sont des fonctions continues sur $[a;b]$; k est un réel

$c \in [a;b]$ $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt =$

$\int_a^b f(t)dt$

$\int_a^b (f+g)(t)dt =$

$\int_a^b k.f(t)dt =$

Si f positive sur $[a;b]$ Alors

Si $f \geq g$ sur $[a;b]$ Alors

5) Exercices: 1) Déterminer l'aire du domaine D , défini par:

$$D = \{M(x,y) / \ -1 \leq x \leq 1 \ \text{ et } \ x^2 \leq y \leq 2-x^2\}$$

2)a) Montrer que pour tout réel x : $1-x^2 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$

b) Représenter graphiquement les fonctions: $x \mapsto 1$; $x \mapsto 1-x^2$; $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, sur $[-1;1]$

c) Déterminer un encadrement de $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{1+x^2}dx$

d) Montrer que pour tout réel x : $1-x^2 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1-x^2+x^4$

e) Déduire de d) un nouvel encadrement de $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{1+x^2}dx$

f) Calculer la valeur exacte de $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$, en déduire un encadrement de π

III) Intégration par parties:

u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a;b]$

1)a) Principe général :

(u.v)’ =

donc: $\int_a^b (u.v)'(t)dt = \int_a^b (u'.v)(t)dt + \int_a^b (u.v')(t)dt$

donc: $\int_a^b (u'.v)(t)dt = [(u.v)(t)]_a^b - \int_a^b (u.v')(t)dt$

On retiendra: $\int_a^b u'.v = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'$

b) Remarque: Pour calculer: $\int_a^b (u'.v)(t)\ dt$, on peut aussi déterminer une primitive de u’.v par parties, puis poursuivre le calcul de l’intégrale

2) Exercice: En intégrant par parties, calculer les intégrales:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ dx$ ii) $\int_0^{\pi} (x^2-1)\sin x\ dx$ iii) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

iv) $\int_0^1 (x+3)\sqrt{2x+1}\ dx$ v) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x-2)^3} dx$ vi) $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(2x+3)^4} dx$