Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		Année scolaire : 2010-2011
Epreuve : Mathématiques	**Devoir de synthèse n° 1**	Durée : 2 heures
Professeur : Maâtallah	Date : Le 09-12-2010	Classe : 4 Info

Exercice n°1 :(6 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. La réponse est acceptée uniquement si elle est justifiée et correctement.

1) Soit la fonction f définie sur $\left]0,\frac{1}{4}\right[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{-x^2+\frac{x}{4}}+x$. Alors $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{f(x)-1}{x}\right]$

a) est l'infini b) est un réel c) n'existe pas

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ est :

a) $+\infty$ b) 1 c) 0

3) $h(x)=(x-1)\sqrt{x-2}+3$ admet une fonction réciproque k définie sur $[3,+\infty[$. Alors $\lim\limits_{x\to3}\left[\frac{k(x)-2}{x-3}\right]$ est :

a) 0 b) $\frac{3}{2}$ c) $+\infty$

4) Soit $u(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}$. Dans $]-\infty,0[$, l'équation :

a) $u(x)=0$ admet une solution b) $u(x)=-1$ n'a pas de solution c) $u(x)=-\frac{1}{2}$ admet une solution

5) Soit z un nombre complexe de module 2 . Le nombre complexe $Z=\bar{z}-\frac{1}{z}$ a pour module :

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{2}$

6) Soit z un nombre complexe . Alors $|z+i|$ est égal à :

a) $|z|+1$ b) $|z-1|$ c) $|i\bar{z}+1|$

Exercice n°2 :(7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\, x\in\mathbb{R} : f'(x)=\frac{4}{(\sqrt{x^2-2x+5})^3}$

b) Montrer que $I(1,0)$ est un centre de symétrie de (C_f) . Donner une équation de la tangente à (C_f) en I.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Construire les courbes (C_f) de f et $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1}.

3) a) Montrer que $\forall\, x\in]-1,1[: f^{-1}(x)=1+\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Montrer que f^{-1} admet des primitives sur $]-1,1[$. Déterminer la primitive F de f^{-1} égale à 1 en 0 .

Exercice n°3 :(7 points)

Soit f une fonction continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[$. On suppose que $f(0)=0$, $f(2)=2$ et $\forall\, x\in]0,2[: f'(x)=\frac{4}{\pi\sqrt{4-x^2}}$.

1) Montrer que f est bijective de $[0,2]$ sur $[0,2]$.

2) Soit la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par : $g(x)=f(2\sin(x))$

a) Montrer que $\forall\, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] : g(x)=\frac{4x}{\pi}$.

b) En déduire $f^{-1}(x)$, $\forall\, x\in[0,2]$.

3) Soit la fonction h définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x)=f(2\cos x)+f(2\sin x)$.

Calculer $h'(x)$, $\forall\, x\in]0,\frac{\pi}{2}[$. En déduire que $\forall\, x\in[0,\frac{\pi}{2}] : h(x)=2$.

Bon travail