Les nombres complexes
Bac maths

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Ex1 : les questions de 1 à 9 sont indépendants :

1. calculer $\left|\frac{1-z}{1-iz}+i\right|\times|z+i|$ (z ≠-i)
2. On considère le point *A* d'affixe 4-2i. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point *B* tel que *OAB* soit un triangle équilatéral de sens direct.
3. Soit le point *D* d'affixe. 2i
   a. Représenter l'ensemble (E) des points *M* d'affixe *z* différente de 2i tels que :
   $\arg(z-2i)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
   b. Représenter l'ensemble (F) des points *M* d'affixe *z tels* que $z = 2i + 2e^{ix}$ où x est un réel
4. A tout point *M* d'affixe z ≠ -2, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{z-1}{z+2}$
   Déterminer l'ensemble des points *M tels* que $|z'|$ = k avec k >0

5) Soit z un nombre complexe de module 1 tel que z ≠ 1
   Montrer que $\frac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur
6) soit z un nombre complexe tel que z ≠ -i
   a) Montrer que $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|=1 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$
   b) Montrer que $\mathrm{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right|<1$
7) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que : $\arg(z-i\bar{z}+1)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
8) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que : $\frac{z+2i}{(1+i)z-1}\in\mathbb{R}_+^*$
9) Soient a et b deux complexes. Montrer que $|a-b|=|1-\bar{a}b|\Leftrightarrow |a|=1 \text{ ou } |b|=1$

Ex2 :

Soit z un complexe non nul. A, B et C les points d'affixes respectives z , $\bar{z}$ et $\frac{z^2}{\bar{z}}$

1- Prouver que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O
2- Prouver que ABC est un triangle isocèle en A
3- On suppose que la partie réelle de z est positive prouver que : $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})\equiv\arg z\ [2\pi]$
4- a tout point *M* d'affixe z ≠0, on associe le point *M*'' d'affixe z' telle que $z'=\bar{z}+\frac{z^2}{\bar{z}}$
   a) On pose $z = r\,e^{i\theta}$ où r>0 . Montrer que $z' = 2r\cos(2\theta)\,e^{i\theta}$
   b) En déduire que O , M et M' sont alignés
   c) Déterminer et construire l'ensemble des points M tel que z'= z

Ex 3 :

On donne le nombre complexe $j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

1- a) Vérifier que 1 + j + j² = 0.
   b) Soit z un nombre complexe, montrer |z| = |z + 1| = 1 ⇔ z = j ou z= $\bar{j}$

2.
Soit ζ un cercle de centre O et de rayon R. On désigne par A, B et C les points de ζ d'affixes respectives u, v et w et tels que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{O}$

a) On pose p = $\frac{v}{u}$ et q= $\frac{w}{u}$. Montrer que : |p| = |q| =1 et que 1+ p + q = 0.

b) En déduire que p = j ou p = j .

c) On suppose que p = j. Montrer que : (v – u) = (j – 1)u; (w – v) = (j – 1)v et (w – u) = (j - 1)u.
En déduire que le triangle ABC est équilatéral

EX4 :

soit les points A , B et C d'affixes respectives 1 , 1+ i $e^{i\theta}$ et 1 + i $e^{-i\theta}$

1) Soit I le milieu du segment [BC] . déterminer l'ensemble des points I lorsque θ ∈ $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$
2) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires
3) Déterminer θ pour que OACB soit un losange
4) Soit θ = $\frac{\pi}{6}$. Montrer que B est l'image de C par la rotation de centre Ω(1+i$\frac{\sqrt{3}}{3}$) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

EX5:

Corriger les équivalences suivantes

a) ABC est un triangle équilatéral ⇔ AB = AC et $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC} \equiv \frac{\pi}{3}\ 2\pi$

b) Soit M un point d'affixe z .
- M est un point de l'axe des réels ⇔ Arg(z) ≡ 0 π
- M est un point de la droite d'équation y = x ⇔ Arg(z) ≡ $\frac{\pi}{4}$ 2π ou z = 0
- M est un point d''une droite (AB) ⇔ Arg($\frac{z_B - z}{z_A - z}$) ≡ 0 π

c) Soient z et z' deux complexes. z× z' = 1 ⇔ arg(z) ≡ - arg(z') 2π

d) Soit z un complexe non nul. z = $re^{i2\theta}$ ou r est un réel non nul ⇔ θ ≡ arg(z) 2π

EX6:

Soit f l'application du plan qui a tout point M d'affixe z≠ 2i associe le point M' d'affixe z'=$\frac{z+i}{z-2i}$

1) pour z≠ 2i .On pose z = 2i + r $e^{i\theta}$, avec r > 0 et θ ∈ IR. Ecrire z' – 1.
2) A est le point d'affixe 2i
   a) déterminer l'ensemble E des points M pour lesquels $|z'-1|$=3
   b) déterminer l'ensemble F des points M pour lesquels arg(z'-1)=3
   c) Représenter E et F

Ex7 :

Les points A , B et C ont pour affixes 4i , 4 et z (voir fig)

1) Déterminer les affixes des points K , D , G et F en fonction de z
2) En déduire que (BD) et (AC) sont parallèles.(A≠ C)
3) Montrer que si C varie sur le cercle de centre O et de rayon 4 alors D varie sur un cercle
4) Que l'on précisera. Pour quelle z les deux droites (BD) et (AC) sont confondues ?

Figure (ex 7)