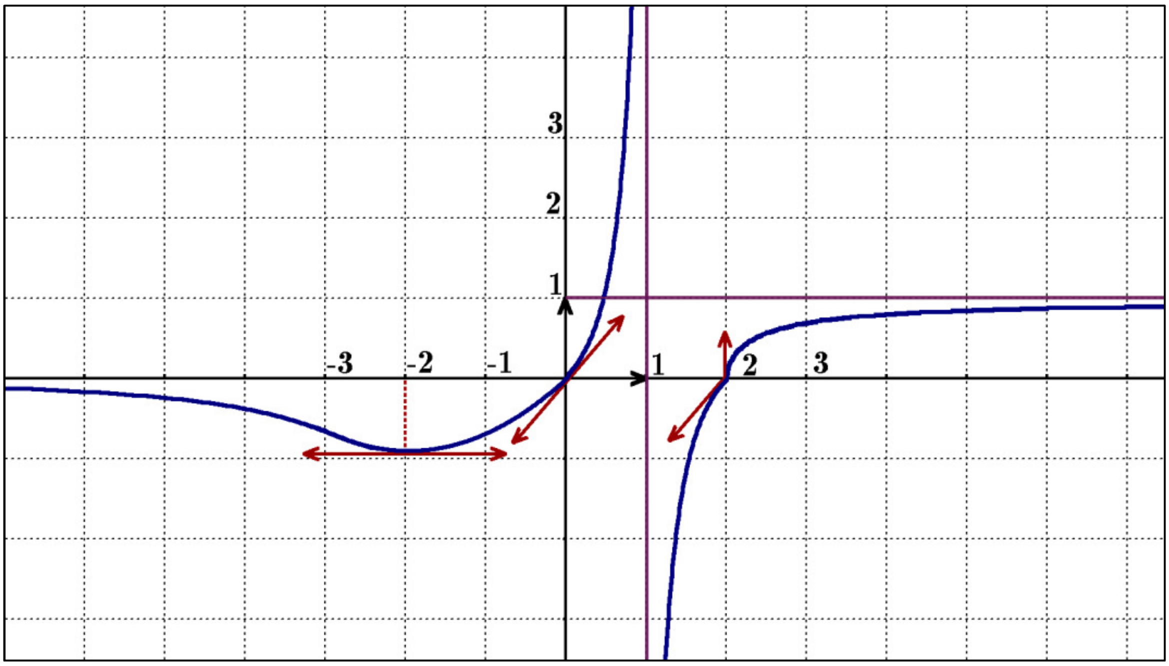
Exercice 1 : (6 points)

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et dont $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$:



A. *En utilisant le graphique donner la bonne réponse :*

1) ⓐ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ ⓑ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ ⓒ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ *n'existe pas*

2) ⓐ *f dérivable en 2* ⓑ *f dérivable à gauche en 2* ⓒ *f dérivable à droite en 2*

3) ⓐ *f dérivable en 0 et en -2* ⓑ *f dérivable en -2 et non en 0* ⓒ *f n'est dérivable ni en 0 ni en -2*

B.

1)a) *Utiliser le graphique pour déterminer :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

b) *Donner les équations des asymptotes à $\mathscr{C}_f$.*

c) *Dresser le tableau de variation de f*

2) *Soit g la restriction de f à $[2,+\infty[$*

a) *Montrer que g réalise une bijection de $]2,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera*

b) *Tracer dans un autre repère $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ et $\Delta : y = x$*

Exercice 2 : (4 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant les réponses.

On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1) $A \times B = B \times A$

2) $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

3) $C \times A = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

4) *A et inversible et* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5) *Les solutions du système* $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont* $\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Exercice 3 : (4,5 points)

1) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.

2) *Soit l'équation* Ⓔ : $z^3 + \left(\sqrt{3} - i\right)z^2 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)z - i = 0$.

a) *Montrer que i est une solution de* Ⓔ.

b) *Déterminer deux nombres complexes d et c tel que :*

$$z^3 + \left(\sqrt{3} - i\right)z^2 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)z - i = (z - i)(z^2 + bz + c).$$

c) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* Ⓔ.

3) *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé* $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = i, \qquad z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad z_C = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Vérifier que A, B et C sont situés sur le cercle trigonométrique.

Exercice 4 : (5,5 points)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

Une partie de la courbe est donnée ci-dessous qu'on complètera tout au long de l'exercice.

1)a) *Justifier que f est définie sur* $\mathbb{R}$.

b) *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que* $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$.

c) *Dresser le tableau de variation de f.*

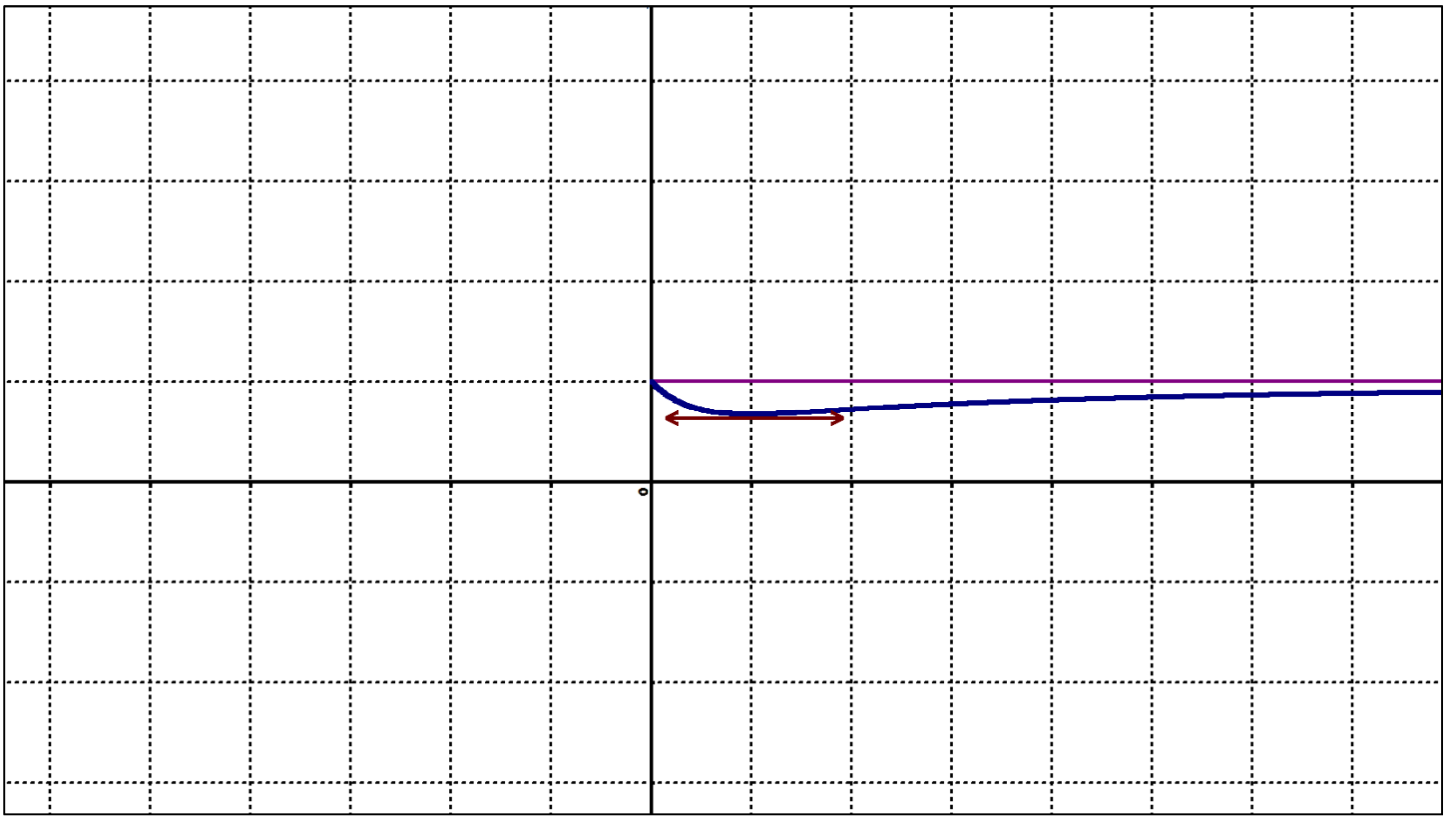
2)a) *Soit $x\in[-1,1]$, montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in]0,1[$.*

b) *Déduire que $\mathscr{C}_f$ coupe la droite $\Delta : y = x$ en un seul point qu'on précisera.*

c) *Compléter $\mathscr{C}_f$ sur la feuille ci-jointe.*

3)a) *Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.*

b) *Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.*



Mme Ben Ayed	Lycée Attarine Ariana	Correction du Synthèse N°1	4e Info	2009-2010

Exercice 1 :

A. 1)ⓑ $\boxed{0,5}$ 2)ⓑ $\boxed{0,5}$ 3)ⓐ $\boxed{0,5}$

B. 1)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\boxed{0,5}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\boxed{0,5}$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ $\boxed{0,5}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ *donc* $\Delta_{y=1}$ *est une asymptote à* $\mathscr{C}_f$ *au voisinage de* $+\infty$

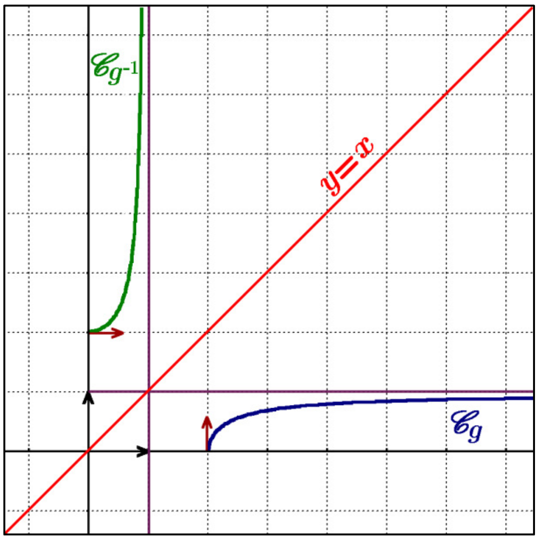
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ *donc* $\Delta_{y=0}$ *est une asymptote à* $\mathscr{C}_f$ *au voisinage de* $-\infty$ $\boxed{0,75}$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ *donc* $\Delta_{x=1}$ *est une asymptote à* $\mathscr{C}_f$

c)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0 ↘		-1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

$\boxed{0,75}$



2)a) *g est continue et strictement croissante sur* $[2,+\infty[$

donc g réalise une bijection de $[2,+\infty[$ *sur* $[0,1[$ $\boxed{0,5}$

b) $\boxed{1}$

Exercice 2 :

1) *Faux* $\boxed{0,5}$ 2) *Faux* ; $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ $\boxed{1}$ 3) *Faux* ; $C \times A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{0,5}$

4) *Vrai* ; $\det(A) = -1 \Rightarrow A$ *inversible* $\boxed{0,5}$ $A \times A^{-1} = I_3$ $\boxed{1}$

5) *Vrai* $B \times \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{0,5}$

Exercice 3 :

1) $\Delta = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4 = -1 = i^2$ *donc* $\delta = i$ *d'où* $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right\}$ $\boxed{1}$

2)a) $(i)^3 + (\sqrt{3} - i)(i)^2 + (1 - i\sqrt{3})(i) - i = -i - \sqrt{3} + i + i + \sqrt{3} - i = 0$ $\boxed{0,5}$

b) $(z-i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b-i)z^2 + (c - ib)z - ic = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i$

par identification on trouve $\begin{cases} b - i = \sqrt{3} - i \Rightarrow b = \sqrt{3} \\ c - ib = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow c - i\sqrt{3} = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow c = 1 \\ -ic = -i \Rightarrow c = 1 \quad \textit{vérifié} \end{cases}$

donc $z^3 + \left(\sqrt{3} - i\right)z^2 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)z - i = (z-i)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)$ $\boxed{1}$

c) Ⓔ $\Leftrightarrow (z-i)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = i = 0$ *ou* $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

$z = i$ *ou* $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ *ou* $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ *d'où* $S_{\mathbb{C}} = \left\{i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right\}$ $\boxed{1}$

3) $\left|z_A\right| = OA = \sqrt{0^2+1^2} = 1$; $\left|z_B\right| = OB = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$; $\boxed{1}$

$\left|z_c\right| = OC = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$; $OA = OB = OC = 1 \Rightarrow A$, B *et* C *sont situés sur* $\mathscr{C}_{(O,1)}$

Exercice 4 :

$\boxed{0,5}$

1)a) *il faut que* $x^2+x+1 \neq 0$; *on a* $\Delta = -3 < 0$ *donc* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+x+1 \neq 0$ *d'où* $D_f = \mathbb{R}$

b) f *est une fonction rationnelle donc dérivable sur* $\mathbb{R}$ $\boxed{0,25}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^3+2x^2+2x-2x^3-2x-x^2-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} \quad \boxed{0,5}$$

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = -1$ $\boxed{0,75}$

$f(1) = \frac{2}{3}$; $f(-1) = 2$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	1

2)a) *On pose* $\varphi(x) = f(x) - x$, $x \in [-1,1]$

φ *est continue sur* $[0,1]$, $\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ *car* $f'(x) < 0$ *sur* $[-1,1]$ φ *est strictement* $\searrow$

$\varphi(0) = f(0) - 1 = 1 > 0$; $\varphi(1) = f(1) - 1 = -\frac{1}{3} < 0$ *ainsi* $\varphi(0)\cdot\varphi(1) < 0$

donc il existe un unique $\alpha \in \left]0,1\right[$ *solution de l'équation* $f(x) = x$ $\boxed{1}$

b) $\mathscr{C}_f \cap \Delta = \left\{A(\alpha,\alpha)\right\}$ *car l'équation* $f(x) = x$ *admet une unique solution* α $\boxed{0,25}$

3)a) f *continue strictement* $\searrow$ *sur* $\left[1,+\infty\right[$

donc f *réalise une bijection de* $\left[1,+\infty\right[$ *sur* $f\left(\left[1,+\infty\right[\right) = \left[\frac{2}{3},1\right[$ $\boxed{0,5}$

b) *On pose* $\begin{pmatrix} f^{-1}(x) = y \\ x \in \left[\frac{2}{3},1\right[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f(y) \\ y \in \left[1,+\infty\right[\end{pmatrix}$; $x = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{y^2+1}{y^2+y+1}$

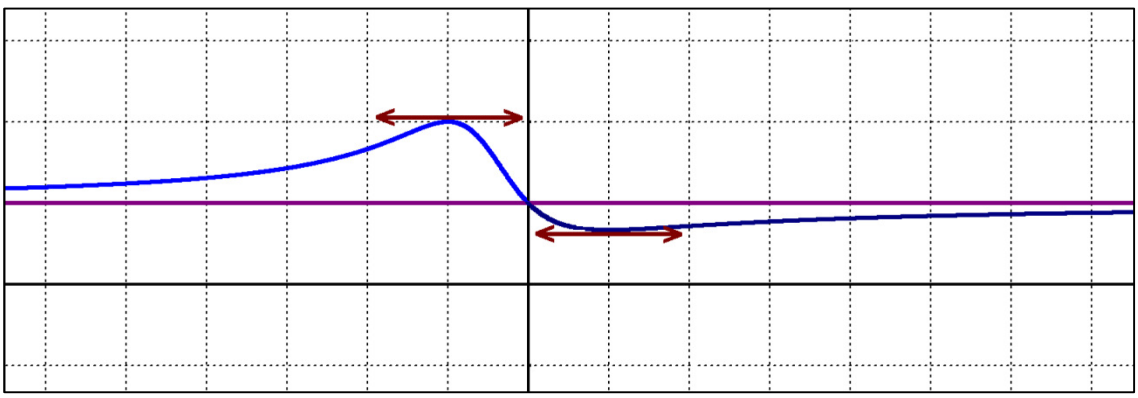
$\Leftrightarrow xy^2 + xy + x - y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)y^2 + xy + (x-1) = 0$, $x \neq 1$

$\Delta = x^2 - 4(x-1)^2 = (x-2(x-1))(x+2(x-1)) = (2-x)(3x-2) > 0$ *car* $x \in \left[\frac{2}{3},1\right[$

$y_1 = \frac{-x-\sqrt{(2-x)(3x-2)}}{2(x-1)} < 0$ *à rejeter car* $y \in \left[1,+\infty\right[$

$y_2 = \frac{-x+\sqrt{(2-x)(3x-2)}}{2(x-1)} = f^{-1}(x)$ $\boxed{1}$

c)



$\boxed{0,75}$