Epreuve: **Mathématiques**	*Série d'exercices n 9*	
Prof: **MAATALLAH**	**Le 20 - 11 - 2009**	*Classe*: **4 M**

EXERCICE N 1 :

On a représenté ci-dessus la courbe représentative C_f d'une fonction f. En utilisant le graphique :

1/ Déterminer : D_f , $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$, $\lim\limits_{x\to5}\left[\frac{f(x)}{x-5}\right]$, $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{f^{-1}(x)-5}{x}\right]$ *et* $\lim\limits_{x\to2}\left[\frac{f^{-1}(x)+1}{x-2}\right]$.

2/ a- Donner le signe de f'(x) sur]-4,2[.

b-Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in]-1,1[$ tel que $f'(x_0) = -1$.

c-Montrer que $f_{/]-4,2[}$ est bijective puis dresser le tableau de variation de f^{-1} .

3/ Montrer que $f_{/]-\infty,-4]}$ est bijective puis dresser le tableau de variation de f^{-1} .

4/ a- Montrer que f admet des primitives sur [2,+∞[.

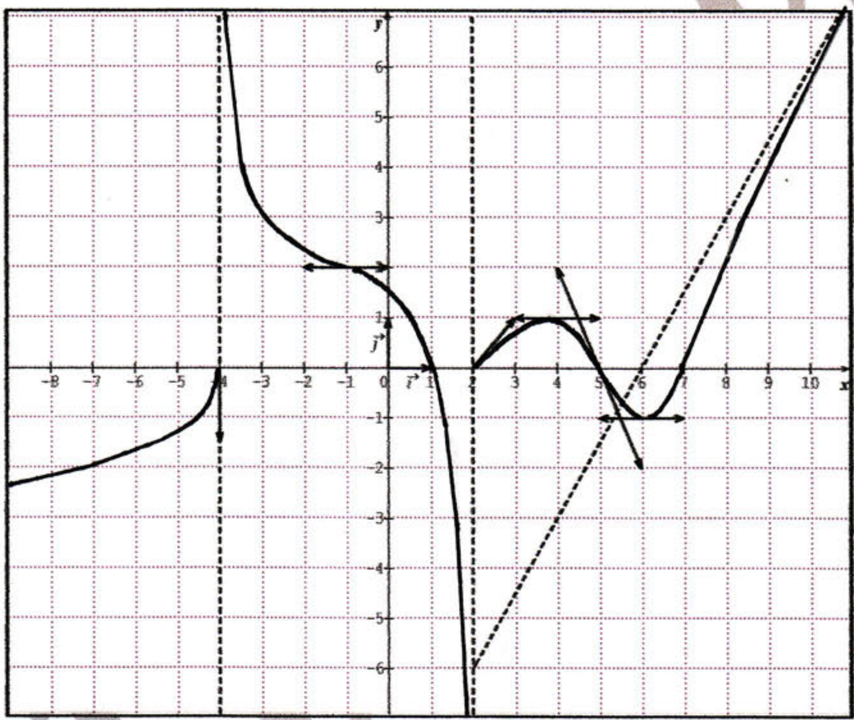
b-Soit F la primitive de $f_{/[2,+\infty[}$ égale à 0 en 4.

i) Donner F'(4), F'(5), F'(6) et F'(7).

ii) Donner les variations de F sur [2,+∞[puis le signe de F(x) sur [2,5].

c-i) Montrer que f est une primitive d'une fonction g sur [2,+∞[.

ii)Donner g(4) et g(6) puis le signe de g(x) sur [2,+∞[.

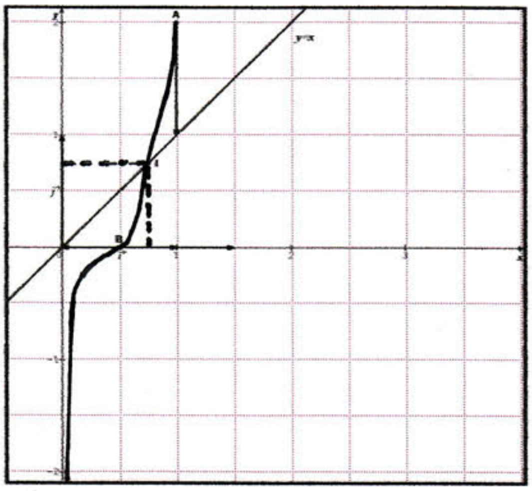


EXERCICE N 2 :

1/ a- Dresser le tableau de variation de f . Montrer que f est bijective de $[\frac{1}{2}, 1]$ sur un intervalle J .

b- Soit g sa réciproque . Dresser le tableau de variation de g.

c- Construire C_g dans un même repère .



2/ Soit la suite V définie par : $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = g(V_n)$.

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{4} \leq V_n \leq 2$ et que V est décroissante.

b- Déduire que V est convergente et déterminer sa limite.

3/ Soit $u(x) = cosx$ et $h = f \circ u$. On suppose que h est la restriction d'une fonction H à [0 , $\frac{\pi}{2}$ [. Soit C_H la courbe de H dans un repère orthogonal.

a- Calculer h(0) et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} h(x)$.

b- Montrer que h est dérivable sur]0, $\frac{\pi}{2}$[puis vérifier que h est une fonction décroissante sur [0, $\frac{\pi}{2}$[.

c- Résoudre dans]0, $\frac{\pi}{2}$[:h'(x)=0 puis dresser le tableau de variation de h sur [0, $\frac{\pi}{2}$[.Montrer que A($\frac{\pi}{3}$, 0)est un point d'inflexion de C_H sur [0, $\frac{\pi}{2}$[.

4/ On suppose que H est définie sur D= $\mathbb{R}\setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z}\}$ et que $\forall x \in D$:$H(\pi - x) = H(x)$ et $H(\pi + x) = H(x)$

a- Déterminer un élément de symétrie et une période de C_H.

b- Construire C_H sur $[-\pi, \pi]$.

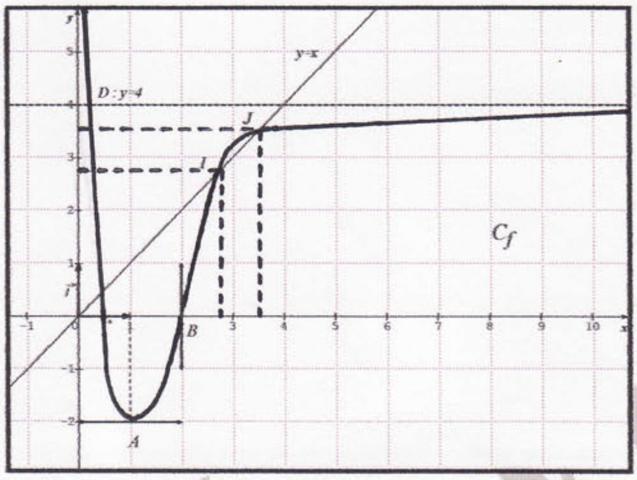
EXERCICE N 3:

1/ a- Dresser le tableau de variation de f . Préciser f($\frac{1}{2}$) et f(2) et déduire le signe de f(x) .

b- Préciser $f(\alpha)$ et $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et déduire le signe de $[f(x)-x]$ sur $[1,+\infty[$.

c- Montrer que $f_{/[1,+\infty[}$ est bijective . Dresser le tableau de variation de f^{-1} .

d- Construire dans le même repère la courbe $C_{f^{-1}}$.



2/ a- Soit la suite U définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq \alpha$.

ii) Etudier la monotonie de U .

iii) Déduire que U est convergente et déterminer sa limite .

b- Soit la suite V définie par : $V_0 = 3$ et $V_{n+1} = f^{-1}(V_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leq V_n \leq \frac{7}{2}$, puis étudier la monotonie de V .

ii) Déduire que V est convergente puis que U et V sont adjacentes .

3/ Soit $g(x) = \sqrt{\tan x}$ et $h = f \circ g$.

a- Montrer que h admet un prolongement H continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ .Un prolongement à droite en 0 est il possible ?

b- Résoudre dans $]0,\frac{\pi}{2}[$,h'(x)=0 puis déduire les variations de h sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.

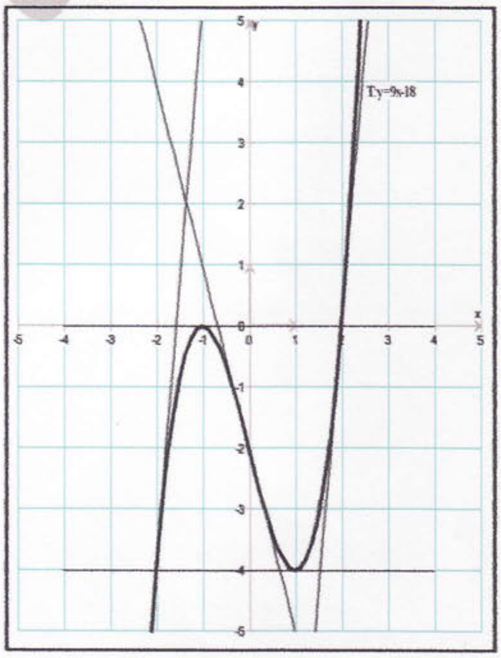
c- Dresser le tableau de variation de h .

d- On suppose que h est la restriction d'une fonction φ impaire et périodique de période π. Construire la partie de C_φ sur $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ dans un repère orthogonal .

EXERCICE N 4

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ou a, b, c et d sont des C_g est sa courbe dans un repère orthonormé .

1/ Pour chaque question une seule réponse est correct . Relever cette réponse en la justifiant .



a- C_g admet un élément de symétrie et $\forall x \in \mathbb{R}$.

■ $g(-x) = g(x)$ ■ $g(-x) = -g(x)$ ■ $g(-x) = -4 - g(x)$

b-Il existe un réel $c \in]-1,1[$ tel que :

■ $g'(x) = \frac{1}{2}$ ■ $g'(x) = 2$ ■ $g'(x) = -2$

c-{-1 , 1 } est l'ensemble des solutions de l'équation :

■ $g(x) = 0$ ■ $g'(x) = 0$ ■ $g''(x) = 0$

d- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) =$

■ $+\infty$ ■ $-\infty$ ■ 0

e- ■ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{g(x)+2}{x}\right] = -3$ ■ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{g(x)+2}{x}\right] = 0$ ■ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{g(x)+2}{x}\right] = 3$

f- La restriction h de g à $[-1,1]$ admet une fonction réciproque dérivable sur :

■ $]-4,0]$ ■ $]-4,0[$ ■ $[-4,0]$

2/ A partir du graphique montrer que $g(x) = x^3 - 3x - 2$.

3/ Reproduire C_h dans un repère orthonormé et construire $C_{h^{-1}}$.

Bon Travail