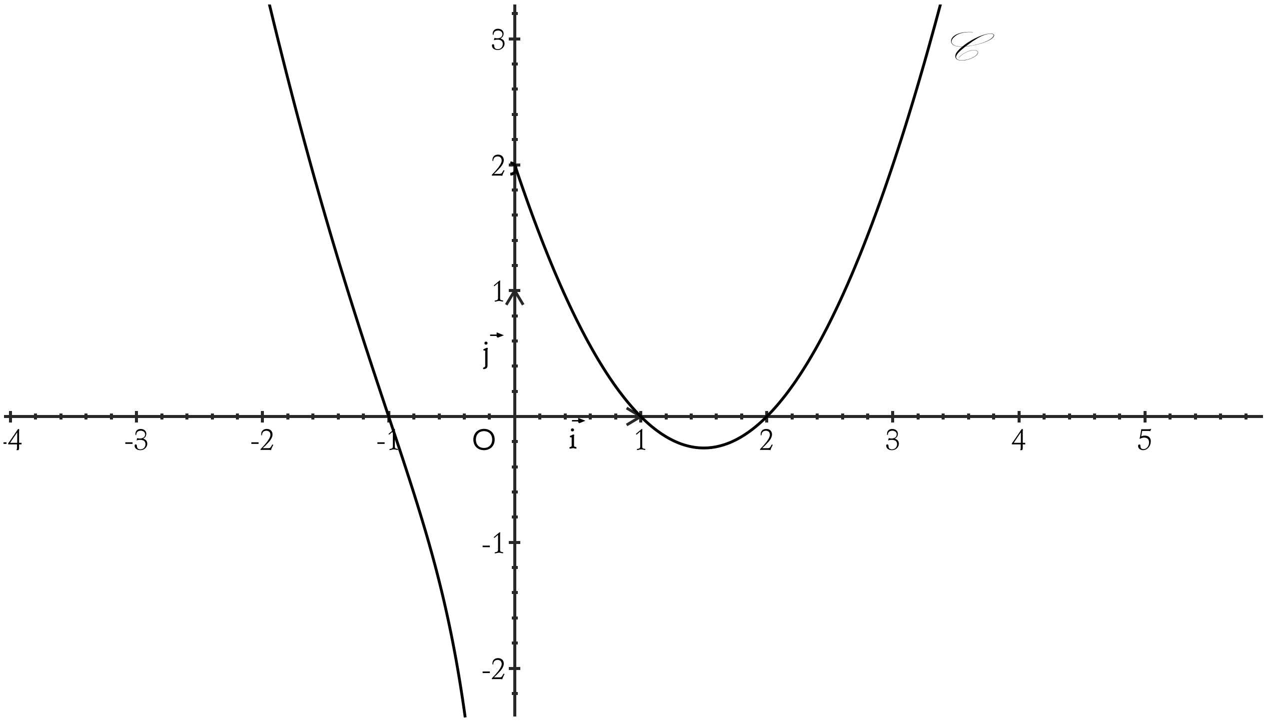
L.S.Avenue de la liberté	**DEVOIR DE CONTRÔLE N°1**
13/11/2010--------------- $4^{ème}$ Math	Mathématiques ---------------------------- 3 heures Prof : -------------Gharbi Chaouki -------------------------

EXERCICE 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

A. Le graphique ci-contre est la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ et telle que :

- ✓ La droite des ordonnées est une asymptote à $\mathscr{C}$
- ✓ $\mathscr{C}$ admet deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$



1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ égal à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 1

2) Le domaine de définition de $f\circ f$ est:

a) $\mathbb{R}^*$ b) $\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$ c) $\mathbb{R}^*-\{-1,1\}$ d) $\mathbb{R}^*-\{-1,1,2\}$

3) Le nombre de solutions de l'équation $f\circ f(x)=-x$ dans $]0,1[$ est :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

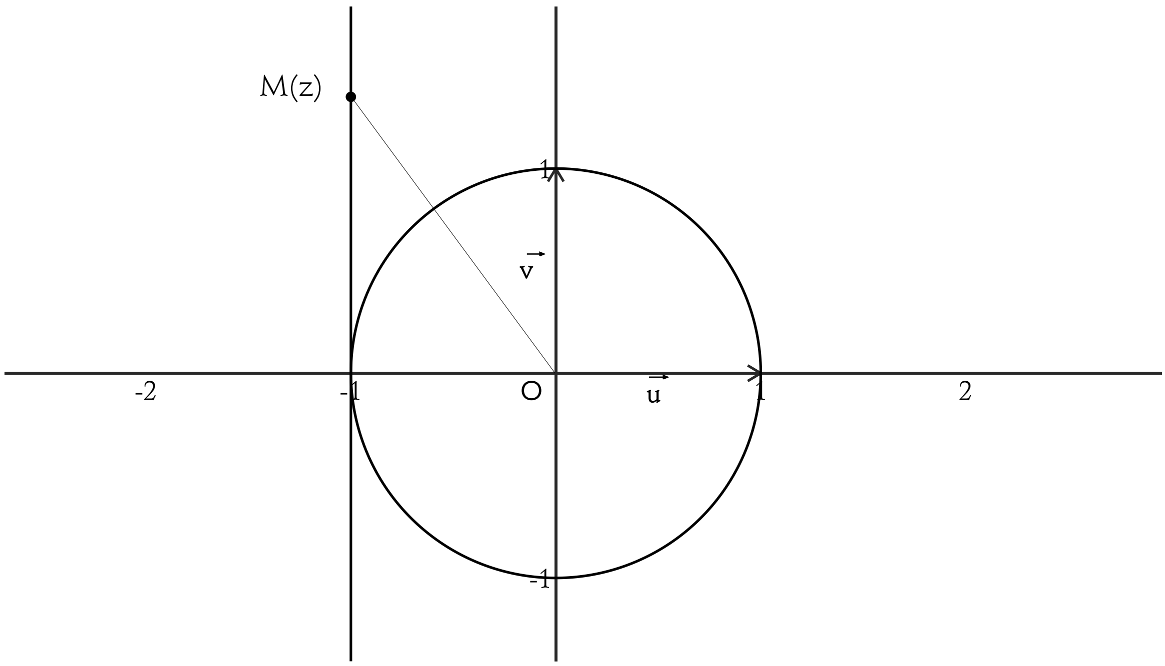
4) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f\circ f(x)}{x}$ égal à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 1

B. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

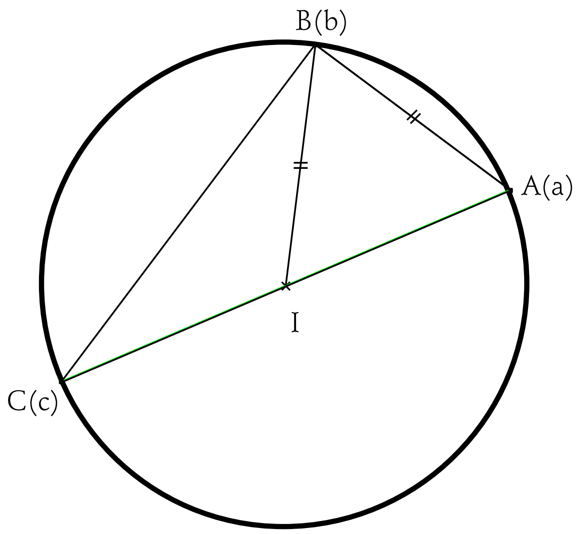
1) Sur le graphique ci-dessous est représenté un point M d'affixe z et tel que :
$\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\theta[2\pi]$; $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, alors la forme exponentielle de $\frac{1}{z}$ est :

a) $-\cos(\theta)\,e^{i\theta}$ b) $-\cos(\theta)\,e^{-i\theta}$ c) $\sin(\theta)\,e^{-i\theta}$ d) $\cos(\theta)\,e^{i\theta}$



2) Sur le graphique ci-dessous est représenté trois points A, B et C d'affixe respectives a, b et c sur un cercle de centre I tel que $AB=IB$, alors le nombre complexe $\frac{b-c}{b-a}$ égal à :

a) 1 b) i c) $-i\sqrt{3}$ d) 2i



EXERCICE 2 : (6 points)

A. On considère, dans $\mathbb{C}$, le polynôme suivant : $P(z)=2z^3-(1+5i)z^2-(5-i)z+2i$

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2-(1+3i)z-2=0$

2) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet, dans $\mathbb{C}$, une solution imaginaire que l'on précisera

3) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$

B. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.

2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $\mathscr{C}$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha\in[0;2\pi]$.

On considère l'application f qui tout point M de $\mathscr{C}$, associe $f(M)=MA\times MB$

a) Montrer, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha}-1=2i\sin(\alpha)e^{i\alpha}$.

b) Montrer l'égalité suivante : $f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

c) En déduire l'égalité suivante : $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

3) Montrer qu'il existe deux points M de $\mathscr{C}$, dont on donnera les affixes, pour lesquels f(M) est minimal. Donner cette valeur minimale.

4) Montrer qu'il existe un seul point M de $\mathscr{C}$, dont on donnera l'affixe, pour lequel f (M) est maximal. Donner cette valeur maximale.

EXERCICE 3 : (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x)=\frac{2x^2+2x+1}{2x+1}$.

1) Dresser le tableau de variation de f

2) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\} \\ U_{n+1}=f(U_n)\ ;\ \forall\, n\in\mathbb{N} \end{cases}$

Déterminer la valeur de U_0 pour que la suite (U_n) soit constante

3) On suppose dans cette question que $U_0\geq 0$

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n\geq 0$

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1}\geq U_n+\frac{1}{2}$

c) Montrer que la suite (U_n) est non majorée. Déduire sa limite

4) On suppose dans cette question que $U_0<-1$

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n<-1$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

EXERCICE 4 : (3 points)

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ d'entiers naturels vérifiant la propriété suivante:

"Pour tout couple d'entiers naturels (n,p) on a : $U_n \wedge U_p = U_n \wedge U_{p+n}$ "

1) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, U_n est un diviseur de U_0 .
2) Soit r le reste de la division euclidienne de n par p $(p<n)$
   a) Montrer que $U_n \wedge U_p = U_p \wedge U_r$
   b) En déduire que : $U_n \wedge U_p = U_d \wedge U_0$ où $d = n \wedge p$
   c) Application : Soit n un entier naturel non nul et p un entier naturel impair.
   Sachant que $U_1 = 5$, déterminer le PGCD de U_{2^n+p} et $U_{2^{n+1}+p}$

EXERCICE 5 : (3 points)

Soit p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On considère l'ensemble $A_p = \{1\,;2\,;...\,;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p.
Soit a un élément de A_p .

1) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation: $ax \equiv 1 (\bmod p)$
2) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p.
   Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation: $ax \equiv 1 (\bmod p)$
3) Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1(\bmod 31)$ et $3x \equiv 1(\bmod 31)$.
   A l'aide des résultats précédents résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation: $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0(\bmod 31)$.