Lycée O. chatti .Msaken	**Devoir de Contrôle N°01**	**Prof : KARMOUS**
Année Scolaire : 2010/2011		**Niveau : $4^{\text{éme}}$Math**

Exercice N°1 : (4 pts)

A] Dans chacune des questions suivantes, une seule réponse correcte indiquer là.

1) On considère la suite (V_n) définie sur IN* par $V_n = n\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$

a) $\lim V_n = \dfrac{\pi}{2}$; b) $\lim V_n = \dfrac{2}{\pi}$; c) $\lim V_n = 1$

2) On considère la suite (W_n) définie sur IN par $W_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

a) $\lim W_n = 2$; b) $\lim W_n = +\infty$; c) $\lim W_n = \dfrac{1}{2}$

B] Soit f une fonction continue et dérivable sur son domaine de définition, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	7

1) Donner dans chaque cas le nombre de solutions de l'équation :
   f(x) = 0 , f(x) = 10 ,
2) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(1-x^2)$$

Exercice N°2 : (6 pts)

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n^2} \end{cases}$; $n \in IN$

1) Montrer que : $\dfrac{1}{2} \le U_n < 1$; $n \in IN$

2) a) Etudier la monotonie de la suite U
   b) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite .

3) a) Montrer que : $0 < 1 - U_{n+1} \le \dfrac{2}{5}(1-U_n)$; $n \in IN$

   b) Déduire que : $0 < 1 - U_n \le \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$; $n \in IN$ puis retrouver la limite de la suite U

4) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$; $V_n = \dfrac{S_n}{n}$ et $W_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$; $n \in IN^*$

   a) Montrer que : $n - \dfrac{1}{3}\left(1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) \le S_n < n$; $n \in IN^*$

   b) Déterminer alors ; $\lim V_n$ et $\lim W_n$

Exercice N°3 : (4pts)

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty, 1]$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

1°) a - montrer que f est continue sur I

b – Montrer que pour tout x de I on a : $f(x) = \dfrac{-1}{1+\sqrt{1-x}}$

2°) a – Montrer que f est strictement décroissante sur I

b – Determiner f (I) et f ([0,1]) .

3°) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet une unique solution α dans]0,1[

4°) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $J = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(\operatorname{tg} x) & \text{si } x \neq -\frac{\pi}{2} \\ g(-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de g sur J .

Exercice N°4: (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A (- i) et B (i) .

Soit f l'application de P \ { A } dans P \ { B } qui a tout point M(z) associe le point M '(z') tel que : $z' = \dfrac{iz+1}{z+i}$

1°) On suppose $M \neq A$ et $M \neq B$

a) Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \dfrac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})\ [2\pi]$

b) En **déduire** l'ensemble (E) des points M(z) tels que : z' est un réel non nul .

2°) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (F) : $(iz+1)^3 = (z+i)^3$

a) Montrer que si z est une solution de (F) alors z est réel .

b) Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\left(\dfrac{1+i\,tg\,\alpha}{i+tg\alpha}\right)$. En déduire les valeurs de $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $tg\,\alpha$ soit une solution de (F) .

3°) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$

b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixe respectives $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = 2i - e^{i\theta}$

i) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport a un point fixe que l'on précisera .

ii) trouver l'ensemble (Γ) décrit par M_1 et M_2 lorsque θ varie .

iii) Montrer que $(M_1M_2)^2 = 8(1 - \sin\theta)$. Déduire la valeur de θ pour laquelle la distance M_1M_2 est maximale .