

LYCEE ABOULOUBABA GABES	DEVOIR DE CONTROLE N° :1	Prof : S-SOLA
Vendredi 22-10-2010		SECTION : 4 M₃
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DUREE : 2h	COEFFICIENT : 4

NB : +Le sujet comporte 2 pages.

+ L'usage de correcteur est interdit.

+ La présentation est appréciée.

EXERCICE N°1 : (5 pts)

A) Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i.

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est un réel est :

- a. la droite (AB) privée de A b. le segment [AB] privé de A
c. le cercle de diamètre [AB] privé de A

2) Soit z un nombre complexe de module 3 Alors le conjugué de z est :

- a. $\frac{3}{z}$ b. $\frac{\sqrt{3}}{z}$ c. $\frac{9}{z}$

3) Soit z un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :

- a. $|z|+1$ b. $\sqrt{z^2+1}$ c. $|iz-1|$

4) Soit z un nombre complexe non nul d'argument ϑ . Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ est :

- a. $-\frac{\pi}{3} + \theta$ b. $\frac{2\pi}{3} + \theta$ c. $\frac{2\pi}{3} - \theta$

5) Soit Ω le point d'affixe 1-i. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z-1+i| = |3-4i|$ a pour équation :

- a. $y = -x + 1$ b. $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ c. $z = 1-i+5e^{i\vartheta}$ avec ϑ réel

B) Pour chaque question, répondre par **Vrai** ou **Faux**. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée

1) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et si pour tout $x \leq 1$ on a $g(x) = 4x + \sqrt{2-x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = +\infty$

2) Soit f une fonction paire définie sur IR telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = -l$

3) Soit f, g et h trois fonctions définies sur IR telles que pour tout réel x, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 4$ alors f admet une limite en $+\infty$

4) Si f est une fonction définie sur IR et dont la courbe représentative admet dans un repère du plan pour asymptote au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation $y = 3x + 5$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5) Soit (u_n) une suite réelle
Si (u_n^2) est convergente alors (u_n) est convergente.

Exercice N°3 : (4 points)

Soit la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2+x+1}-x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Montrer que : pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$

et en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

4)a/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]-\frac{1}{2}, 0[$

b/ En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - \alpha}$

EXERCICE N°3 (6 pts)

1) a) Calculer $(1-2\sqrt{3}i)^2$

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0$.

c) Mettre les solutions sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points A, B et M d'affixes respectives $i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}e^{i\theta}$, $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

a) Montrer que $z_M - z_A = 2i \sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$ en déduire la distance AM en fonction de θ .

b) Déterminer θ pour le triangle OAM soit isocèle en A.

3) On désigne par B' le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses et N le point du plan tel que OB'NM soit un parallélogramme

a) Déterminer les affixes des points B' et N.

b) Déterminer l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

EXERCICE N°4 (5 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points A, B, M $\neq B$ et M' d'affixes respectives $1+2e^{i\theta}$, 1 , z et z' telle que $z' = \frac{z-1-2e^{i\theta}}{z-1}$.

1) Soit f l'application de $P \setminus \{B\}$ dans P qui à tout point M associe le point M'.

a) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation

(E) : $z^2 - 2z + 1 + 2e^{i\theta} = 0$.

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E)

2) Dans cette question on suppose que $\theta = \pi$.

a) Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 [2\pi]$

b) En déduire que la demi droite [BA) est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$.

c) Montrer que z' est un imaginaire si et seulement si $|z| = 1$.

d) En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique de centre O