

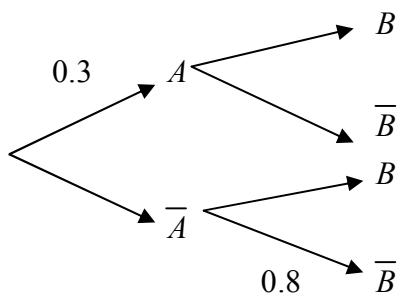
Thèmes abordés :

Similitude ; Arithmétique ; Espace ; Equations différentielles du second ordre ; primitives et intégrales.

Exercice n°1 : ©

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois propositions est exacte.

1) On a représenté une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci – dessous :



Sachant que $p(B) = 0.41$ alors $P(B|A) = :$

- (a) 0,3.
- (b) 0,9.
- (c) 0,6.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (C) est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 + \ln x}$. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de la courbe constitué par les points de (C) d'abscisses comprises entre 1 et e . Le volume de \mathcal{V}^o du solide ainsi engendré est :

- (a) π .
- (b) πe .
- (c) $\pi(e - 1)$.

3) Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ est :

- (a) $x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 + 1})$
- (b) $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$
- (c) $x \mapsto 2 \ln(x^2 + 1)$.

Exercice n°2 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par Δ la droite qui porte la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- 1) Soit f la similitude directe qui envoie I en O et B en C.
 - (a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de f.
 - (b) Montrer que le point A est le centre de f. En déduire la forme réduite de f.
- 2) Soit R la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$.
 - (a) Vérifier que $R = S_{(AC)} \circ S_{\Delta}$.
 - (b) Soit $\sigma = f \circ S_{\Delta}$. Prouver que σ est une similitude indirecte et déterminer sa forme réduite.
- 3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient $z_A = -1 + i$; $z_C = i\sqrt{2}$; $z_E = 2 - 4i$ et $z_F = 3 + 2i$ les affixes respectifs des points A, C, E et F.

- (a) Montrer que la transformation complexe de g qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \bar{z} - 1 + i(1 + \sqrt{2})$ est celle de la symétrie orthogonale d'axe (AC).
- (b) Montrer que la forme complexe de σ est $z' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$.
- 4) (a) Déterminer l'affixe du point G = $\sigma(E)$, puis vérifier que \overrightarrow{AF} et \overrightarrow{AG} sont orthogonaux.
(b) On considère un point M d'affixe $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que \overrightarrow{AF} et $\overrightarrow{AM'}$ avec $M' = \sigma(M)$ sont orthogonaux si et seulement si $5x + 3y = -2$.
- (c) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $5x + 3y = -2$.
- (d) En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [-6, 6] tels que \overrightarrow{AF} et $\overrightarrow{AM'}$ sont orthogonaux.

Exercice n°3 : ©

- 1) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.
- 2) Soit n un entier naturel non nul.
 - (a) Montrer que le couple $(14n + 3, 21n + 4)$ est une solution de (E).
 - (b) En déduire que $\text{pgcd}(14n + 3, 21n + 4) = 1$.
- 3) Soit d le plus grand commun diviseur de $2n + 1$ et $21n + 4$.
 - (a) Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.
 - (b) Montrer que $n \equiv 6 \pmod{13} \Leftrightarrow d = 13$.
- 4) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
 $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.
 - (a) Montrer que A et B sont divisibles par $n - 1$ dans \mathbb{Z} .
 - (b) Déterminer en fonction de n, le pgcd de A et B.

Exercice n°4 : ©

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On désigne par P le centre de gravité du triangle HGF et Q le centre de gravité du triangle FBG et on muni l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

- 1) (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).
(b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ACF) est $-x + y + z = 0$

(c) Déterminer les points W de la droite (BH) tel que le volume de tétraèdre ACFW est égale à $\frac{11}{6}$
- 2) Soit K le milieu de [FG] et h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$
 - (a) Montrer que $h(H) = P$ et $h(B) = Q$
 - (b) Donner l'expression analytique de h.
- 3) Soit le plan (R) : $-x + y + z - \frac{1}{3} = 0$
 - (a) Montrer que (R) l'image du plan (ACF) par h.
 - (b) Vérifier que (BH) est perpendiculaire à (ACF) en un point N que l'on déterminera les coordonnées. En déduire que (R) est perpendiculaire à (PQ) en un point N' que l'on déterminera les coordonnées.
 - (c) Donner une équation cartésienne de la sphère S tangente aux plans (R) et (ACF) et dont le centre appartient à la droite (NN').

Exercice n°5 : ©

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur \mathbb{R} , de l'équation différentielle suivante : (E) : $y'' + y = 0$.
2. Soit g une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}^* .

On définit la fonction f de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} par : $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

3. On considère l'équation différentielle (E') : $y'' = -\frac{1}{x^4}y$.

Montrer que la fonction g est solution de (E'), si et seulement si, la fonction f définie pour tout réel non

nul x par $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (E).

4. En déduire toutes les solutions de (E') définies sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
5. Soit g une solution de l'équation (E') définie sur $]0, +\infty[$.

(a) Déduire des questions précédentes une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$

(b) Calculer la valeur de l'intégrale $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

Exercice n°1 :

$$1) P(B) = p(A) \times p(B|A) + p(\bar{A}) \times p(B|\bar{A}) \Rightarrow p(B|A) = \frac{0.41 - 0.7 \times 0.2}{0.3} = 0.9$$

$$2) \mathcal{V}^{\circ} = \int_1^e \pi(1 + \ln x) dx = \pi [x + x \ln x - x]_1^e = \pi e$$

$$3) \text{ Une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de la fonction } x \mapsto \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} \text{ est : } x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2+1) = \ln(\sqrt{x^2+1}).$$

Exercice n°3 :

$$1) (x, y) \text{ est une solution de } (E) \Leftrightarrow 3x - 2y = 1.$$

$$(1, 1) \text{ est une solution particulière } \Leftrightarrow 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$$

$$\Rightarrow 3(x-1) - 2(y-1) = 0 \Rightarrow 3(x-1) = 2(y-1) \Rightarrow 3|2(y-1), \text{ or } 3 \wedge 2 = 1 \Rightarrow 3|(y-1) \Rightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{tel que } y-1 = 3k \Rightarrow y = 1 + 3k, \text{ or } 3(x-1) = 2(y-1) \Rightarrow 3(x-1) = 2 \times 3k \Rightarrow x = 1 + 2k$$

$$\Rightarrow (x, y) = (1 + 2k, 1 + 3k); k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Inversement : } \forall k \in \mathbb{Z}, 3(1 + 2k) - 2(1 + 3k) = 1 \Rightarrow (1 + 2k, 1 + 3k) \text{ est une solution de } (E).$$

$$\text{Ainsi } S_{\mathbb{Z}^2} = \{(1 + 2k, 1 + 3k); k \in \mathbb{Z}\}$$

$$2) \text{ Soit } n \text{ un entier naturel non nul.}$$

$$(a) (14n + 3, 21n + 4) \text{ est une solution de } (E).$$

$$(b) (14n + 3) \times 3 + (21n + 4) \times (-2) = 1, \text{ avec } (3, -2) \in \mathbb{Z}^2 \text{ alors d'après l'identité de Bezout on a :}$$

$$14n + 3 \text{ et } 21n + 4 \text{ sont premiers entre eux } \Rightarrow \text{pgcd}(14n + 3, 21n + 4) = 1.$$

$$3) \text{ Soit } d \text{ le plus grand commun diviseur de } 2n + 1 \text{ et } 21n + 4.$$

$$(a) d|2n + 1 \text{ et } d|21n + 4 \Rightarrow d|21(2n + 1) - 2(21n + 4) \Rightarrow d|13, \text{ or } d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d = 1 \text{ ou } d = 13.$$

$$(b) n \equiv 6 \pmod{13} \Leftrightarrow d = 13 ?$$

$$\blacktriangleright \text{ Si } n \equiv 6 \pmod{13} \text{ alors } 2n + 1 \equiv 0 \pmod{13} \text{ et } 21n + 4 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 13|2n + 1 \text{ et } 13|21n + 4 \Rightarrow 13|d, \text{ or } d|13 \Rightarrow d = 13.$$

$$\blacktriangleright \text{ Inversement : si } d = 13 \Rightarrow 13|2n + 1 \text{ et } 13|21n + 4 \Rightarrow 13|21n + 4 - 10(2n + 1) \Rightarrow 13|n - 6 \Rightarrow n - 6 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow n \equiv 6 \pmod{13}.$$

$$4) (a) A = 21n^2 - 17n - 4 = (n - 1)(21n + 4) \Rightarrow (n - 1)|A$$

$$B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3 = (n - 1)(28n^2 + 20n + 3) = (n - 1)(14n + 3)(2n + 1) \Rightarrow (n - 1)|B$$

$$(b) A \wedge B = (n - 1)(21n + 4) \wedge (n - 1)(14n + 3)(2n + 1) = (n - 1)[(21n + 4) \wedge (14n + 3)(2n + 1)], \text{ or}$$

$$\text{pgcd}(14n + 3, 21n + 4) = 1 \Rightarrow A \wedge B = (n - 1)[(21n + 4) \wedge (2n + 1)]$$

➡ Si $n \equiv 6 \pmod{13}$ alors $A \wedge B = 13(n - 1)$

➡ Si non alors $A \wedge B = n - 1$.

Exercice n°4 :

1) (a) $B(1, 0, 0)$ et $H(0, 1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (BH) : \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

(b) $A(0, 0, 0)$; $C(1, 1, 0)$ et $F(1, 0, 1)$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Est un vecteur normal à (ACF)

$$\Rightarrow (ACF) : x - y - z + d = 0, \text{ or } A(0, 0, 0) \in (ACF) \Rightarrow d = 0 \Rightarrow (ACF) : x - y - z = 0.$$

(c) $W \in (BH)$ et $V(ACFW) = \frac{11}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{AW}| = \frac{11}{6} \Rightarrow |(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{AW}| = 11$

Or $W(1 - \alpha, \alpha, \alpha) \Rightarrow |1 - \alpha - \alpha - \alpha| = 11 \Rightarrow 1 - 3\alpha = 11$ ou $1 - 3\alpha = -11 \Rightarrow \alpha = -\frac{10}{3}$ ou $\alpha = 4$

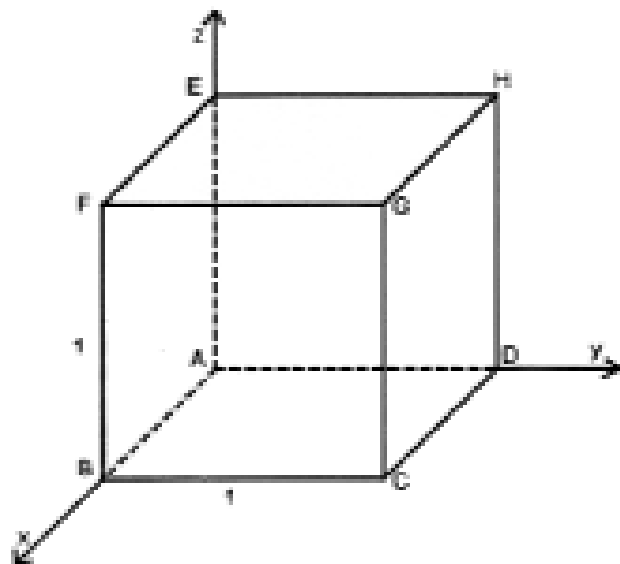
$$\Rightarrow W \left(\frac{13}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{10}{3} \right) \text{ ou } W(-3, 4, 4).$$

2) Soit K le milieu de $[FG]$ et h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$

(a) P est le centre de gravité du triangle HGF et Q le centre de gravité du triangle FBG

$$\Rightarrow \overrightarrow{KP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{KH} \text{ et } \overrightarrow{KQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{KB} \Rightarrow h(H) = P \text{ et } h(B) = Q.$$

(b) $h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x_K \\ y' = \frac{1}{3}y + \left(1 - \frac{1}{3}\right)y_K \\ z' = \frac{1}{3}z + \left(1 - \frac{1}{3}\right)z_K \end{cases}, \text{ or } K \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y' = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \\ z' = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \end{cases}.$



3) (a) (R) : $-x + y + z - \frac{1}{3} = 0$

➡ (R) et (ACF) ont même vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (R) // (ACF)$

Or $A(0, 0, 0) \in (ACF)$ et $h(A) = A' \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \in (R) \Rightarrow h((ACF)) = (R)$.

(b)

➡ $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ACF) $\Rightarrow (BH) \perp (ACF)$

Soit N le point d'intersection de (BH) avec (ACF) \Rightarrow les coordonnées de N vérifient :

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow N \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$.

➡ (BH) \perp (ACF) en N, or h conserve l'orthogonalité et le contact

$\Rightarrow h((BH)) \perp h((ACF))$ en $h(N) = N' \Rightarrow (PQ) \perp (R)$ en $N' \left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9} \right)$.

(c) S est la sphère tangente aux plans (R) et (ACF) et dont le centre appartient à la droite (NN').

➡ Soit $I(a, b, c)$ le centre de la sphère

On a : $d(I, (ACF)) = d(I, (R)) \Rightarrow \frac{|a - b - c|}{\sqrt{3}} = \frac{\left| a - b - c + \frac{1}{3} \right|}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a - b - c = a - b - c + \frac{1}{3} \text{ impossible} \\ \text{ou} \\ a - b - c = -a + b + c - \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2a - 2b - 2c + \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{De plus on a : } I \in (\text{NN}') : \begin{cases} a = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}t \\ b = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}t \\ c = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{4}{9}t - \frac{2}{3} - \frac{2}{9}t - \frac{2}{3} - \frac{8}{9}t + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{7}{9}, \frac{7}{18}, \frac{5}{9}\right)$$

N.B : I est le milieu de [NN'].

$$\blacktriangleright \text{ Soit R le rayon de la sphère } \Rightarrow R = d(I, (\text{ACF})) \Rightarrow R = \frac{\left| \frac{7}{9} - \frac{7}{18} - \frac{5}{9} \right|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

$$\Rightarrow S : \left(x - \frac{7}{9}\right)^2 + \left(x - \frac{7}{18}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{1}{108}.$$

Exercice n°5 :

1) (E) : $y'' + y = 0 \Leftrightarrow y(x) = a \cos x + b \sin x$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

2) g une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}^* ; $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)\right) = g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}g''\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)$$

3) (E') : $y'' = -\frac{1}{x^4}y$.

$$f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right) \text{ est solution de (E)}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) + f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right) + xg\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow g''\left(\frac{1}{x}\right) = -x^4g\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow g''(x) = -\frac{1}{x^4}g(x) \Leftrightarrow g \text{ est solution de (E')}.$$

4) g est solution de (E')

$$\Leftrightarrow f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right) \text{ est solution de (E)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right) = a \cos x + b \sin x$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}(a \cos x + b \sin x)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = x\left(a \cos\left(\frac{1}{x}\right) + b \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), \forall x \in \mathbb{R}^*$$

5) Soit g une solution de l'équation (E') définie sur $]0, +\infty[$.

$$\Leftrightarrow g(x) = x\left(a \cos\left(\frac{1}{x}\right) + b \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), \forall x \in]0, +\infty[.$$

(a) Soit $h : x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x) \Rightarrow h(x) = -g''(x), \forall x \in]0, +\infty[$.

\Rightarrow une primitive de h sur $]0, +\infty[$ est $H : x \mapsto -g'(x)$

$$H(x) = -\left(a \cos\left(\frac{1}{x}\right) + b \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x\left[-\frac{1}{x^2}\left(-a \sin\left(\frac{1}{x}\right) + b \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow H(x) = \left(-a + \frac{b}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \left(b + \frac{a}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in]0, +\infty[.$$

$$(b) \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^4} \times \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$$

On prend $a = 0$ et $b = 1$, on aura $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^4} \times \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^4} \times g(x) dx = [-g'(x)]_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} = g'\left(\frac{1}{\pi}\right) - g'\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

$$\text{Avec } g'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \pi - 1$$