Thèmes abordés :

Complexes (Coniques) ; Arithmétiques ; Similitudes ; Fonction logarithme népérien et exponentielle

Exercice n°1 : ©

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$.
2. Pour tout complexe z tel que $z=e^{i\theta}$ avec $-\pi\le\theta\le\pi$, $\theta\ne\frac{2\pi}{3}$ et $\theta\ne-\frac{2\pi}{3}$, on pose $z'=\frac{1}{z^2+z+1}$.

a) Vérifier que $z^2+z+1=z\left(1+z+\bar{z}\right)$.
b) Calculer le module et un argument de z' en fonction de θ.
c) On pose $z'=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que $x^2+y^2=(1-2x)^2$.
d) En déduire que le point M d'affixe z' appartient à une hyperbole que l'on caractérisera.

Exercice n°2 : ©

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\begin{cases} n\equiv 13\,(19)\\ n\equiv 6\,(12)\end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N=13\times12v+6\times19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n\equiv n_0\,(19)\\ n\equiv n_0\,(12)\end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n\equiv n_0\,(19)\\ n\equiv n_0\,(12)\end{cases}$ équivaut à $n\equiv n_0\,(12\times19)$.

3. a. Trouver un couple (u ; v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).
4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12\times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice n°3 : ©

ABC est un triangle rectangle en A et de sens direct tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$. Soit A' le symétrique de A par rapport à C. On note S la similitude directe qui transforme A' en C et C en B.

1. a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
b) Soit Ω le centre de S. Montrer que les droites (ΩC) et (BC) sont perpendiculaires. Construire Ω.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(A,\vec{u},\vec{v})$ tel que B a pour affixe 1.

a) Calculer les affixes des points C et A'.
b) Déterminer la forme complexe de S.
c) En déduire l'affixe du point Ω.
3. a) Préciser le rapport de la similitude indirecte f de centre C et qui transforme B en A.
b) Déterminer l'axe de f.
4. a) Soit $\varphi = \mathrm{f} \circ \mathrm{S}$. Montrer que φ est une symétrie glissante.
b) Déterminer les éléments caractéristiques de φ.

Problème :

Partie I

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On considère la fonction g_n définie sur IR*$_+$ par $g_n(x) = nx + 2\ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de g_n.
2) Montrer que pour tout $x \in$ IR*$_+$, on a $\sqrt{x} > \ln x$.
3) a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans IR*$_+$ une unique solution notée α_n, puis montrer que $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$.

Partie II

I. soit f la fonction d éfinie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm$.

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3) a) Montrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
4) tracer C_f. on prendra $f\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0.5$.

II. On pose I = $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

1) a) Montrer que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.
   b) A l'aide de la question 3) a) de la partie II, montrer que $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
   c) Montrer que $\left[x = \alpha_3 \Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ et } f(x) = x\right)\right]$, où α_3 est la solution de l'équation $g_3(x) = 0$
2) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $\left|u_{n+1}-\alpha_3\right| \leq \frac{2}{3}\left|u_n-\alpha_3\right|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $\left|u_n-\alpha_3\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

d) Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ est convergente et donner sa limite.

Partie III.

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\int_x^{8x} f(t)dt$.

1) a) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$.
   b) Donner l'expression de $F'(x)$ pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$ et en déduire le sens de variation de F.
2) a) Montrer que pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$, on a $0 \leq F(x) \leq 2f(x)\left(1-e^{-7x}\right)$.
   b) En déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
   c) Dresser le tableau de variation de F.

Exercice n°1 :

1) $z^2+z+1=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1-4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

$z' = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z'' = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

2) $z = e^{i\theta}$ avec $-\pi \le \theta \le \pi$, $\theta \ne \dfrac{2\pi}{3}$ et $\theta \ne -\dfrac{2\pi}{3}$, on pose $z' = \dfrac{1}{z^2+z+1}$.

N.B : $z^2+z+1 \ne 0 \Leftrightarrow z \ne e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z \ne e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

a) $z\left(1+z+\bar{z}\right) = z+z^2+z\bar{z} = z+z^2+|z|^2 = z+z^2+1$

b) $z' = \dfrac{1}{z^2+z+1} = \dfrac{1}{z\left(1+z+\bar{z}\right)} = \dfrac{1}{e^{i\theta}\left(1+2\cos\theta\right)} = \left(\dfrac{1}{1+2\cos\theta}\right)\times e^{-i\theta}$

- $|z'| = \dfrac{1}{|1+2\cos\theta|}$
- Si $\theta \in \left]-\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right[$ alors $\dfrac{1}{1+2\cos\theta} > 0$ et $\arg z' \equiv -\theta\ [2\pi]$

  Si $\theta \in \left[-\pi;-\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$ alors $\dfrac{1}{1+2\cos\theta} < 0$ et $\arg z' \equiv (\pi-\theta)\ [2\pi]$.

c) On pose $z' = x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$|z'|^2 = x^2+y^2 = \dfrac{1}{\left(1+2\cos\theta\right)^2}$

De plus on a : $\text{Ré}(z') = x = \dfrac{\cos(-\theta)}{1+2\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}$

$\Rightarrow x+2x\cos\theta = \cos\theta \Rightarrow (1-2x)\cos\theta = x \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{x}{1-2x} \Rightarrow 1+2\cos\theta = \dfrac{\cos\theta}{x} = \dfrac{1}{1-2x}$

$\Rightarrow |z'|^2 = x^2+y^2 = \dfrac{1}{\left(1+2\cos\theta\right)^2} = (1-2x)^2$.

d) $x^2+y^2 = (1-2x)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1-4x+4x^2 \Leftrightarrow -3x^2+4x+y^2 = 1 \Leftrightarrow -3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}+y^2 = 1$

$\Leftrightarrow -3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2 = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

On pose $X = x-\dfrac{2}{3}$ et $Y = y \Rightarrow M(z') \in \mathcal{H} : \dfrac{X^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \dfrac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

dans le repère $R' = \left(\Omega,\vec{u},\vec{v}\right)$ où $\Omega\left(\dfrac{2}{3},0\right)_{(O,\vec{u},\vec{v})}$.

$\mathcal{H}$ est une hyperbole de foyer F $\left(\frac{2}{3},0\right)_{R'}$, de directrice $\left(D : X = \frac{1}{6}\right)_{R'}$ et d'excentricité $e = 2$

$\Rightarrow$ F $\left(\frac{4}{3},0\right)_{R}$ et $\left(D : x = \frac{5}{6}\right)_{R}$

Exercice n°2 :

Partie A :

1)

Théoème de Bézout : Soit a et b deux entiers non nuls.

a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss : Soit a, b et c trois entiers non nuls. Si $a \wedge b = 1$ et $a \mid bc$ alors $a \mid c$.

2) Si $a \wedge b = 1$ et $a \mid bc$ alors il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$ et $a \mid bc$

$\Rightarrow acu + bcv = c \Rightarrow acu + kav = c \Rightarrow a\,(cu + kv) = c \Rightarrow a \mid c$

Partie B : $(S)\begin{cases} n \equiv 13\,(19) \\ n \equiv 6\,(12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 13 + 19k \\ n \equiv 6 + 12k' \end{cases}$.

1) Théorème de Bézout : 19 et 12 sont premiers entre eux donc il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S) : il faut mettre N sous la forme $N \equiv 13 + 19k$. Or $12v = 1 - 19u$ donc $N = 13(1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 + 19 \times (-7u)$.

De même $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13 \times 12v + 6(1 - 12v) = 6 + 12 \times 7v$.

2) a. Si n_0 est une solution de (S), on a $\begin{cases} n_0 = 13 + 19k_0 \\ n_0 = 6 + 12k_0' \end{cases}$ d'où en soustrayant ligne à ligne :

$$\begin{cases} n - n_0 = 19(k - k_0) \\ n - n_0 = 12(k' - k_0') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}.$$

b. En fait 19 divise $n - n_0$ de même que 12 ; comme ils sont premiers entre eux, 19×12 divise $n - n_0$, ce qui équivaut à $n \equiv n_0\,(12 \times 19)$.

3) a. Avec l'algorithme d'Euclide on a $19(-5) + 12(8) = 1$; on peut donc prendre $u = -5$ dans $N = 13 + 19 \times (-7u)$, ce qui donne $N = 678$; de même on prend $v = 8$ et $N = 6 + 12 \times (7v)$, ce qui redonne bien $N = 678$.

b. $n \equiv n_0\,(12 \times 19) \equiv 678(12 \times 19) \equiv 678(228) \equiv 222(228)$.

4) 222.

Exercice n°3 :

S la similitude directe qui transforme A' en C et C en B.

1) a) soit k le rapport de S $\Rightarrow k = \frac{CB}{A'C} = \frac{CB}{CA} = \frac{1}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = 2$

Soit θ une mesure de l'angle de S $\Rightarrow \theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{CB}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

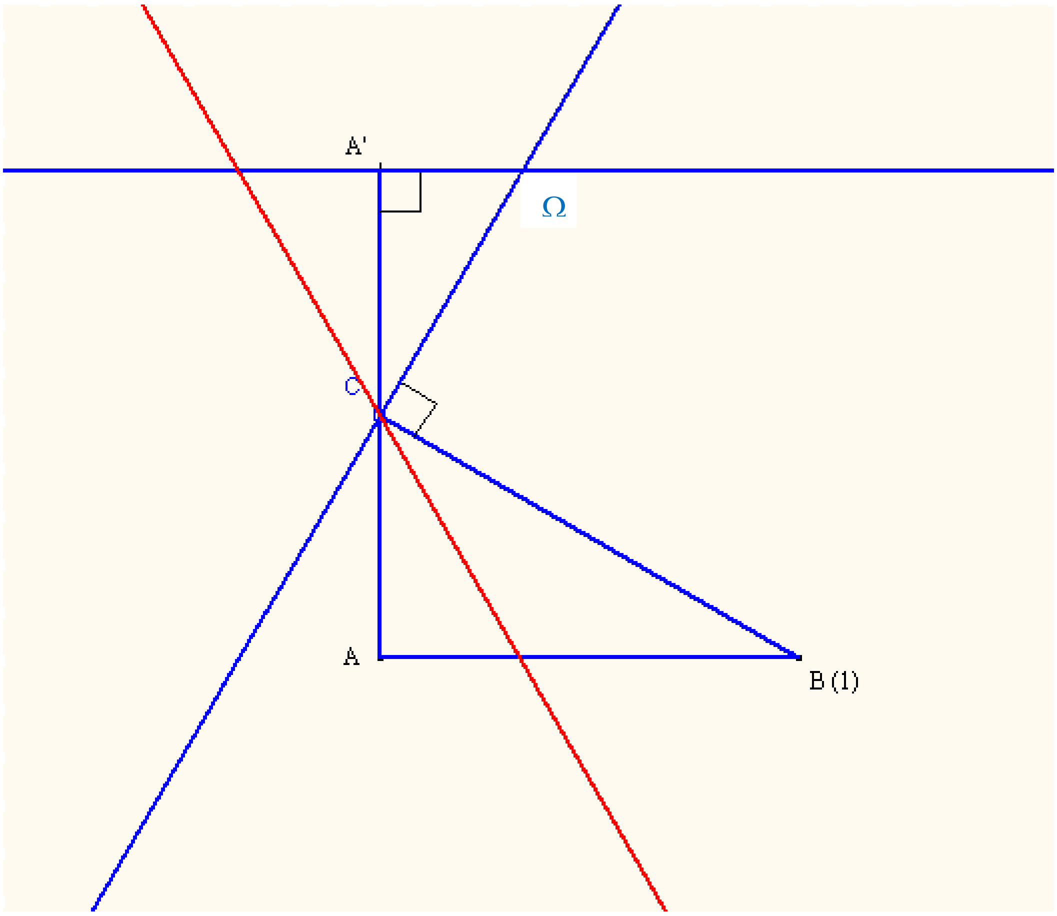
b) Soit Ω le centre de S $\Rightarrow$ S (Ω) = Ω, or S (C) = B $\Rightarrow \begin{cases} \Omega B = 2\Omega C \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Montrons que le triangle ΩBC est rectangle en C :

$$CB^2 + C\Omega^2 = C\Omega^2 + \Omega B^2 - 2\overrightarrow{\Omega C}\cdot\overrightarrow{\Omega B} + C\Omega^2 = 2C\Omega^2 + \Omega B^2 - 2\Omega C \times \Omega B \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \Omega B^2$$

$\Rightarrow$ (ΩC) $\perp$ (CB).

Construction de Ω : (On montre de même que ΩA′C est rectangle en A′).



2) B (1, 0)

a) $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow z_C = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow z_{A'} = 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) S a pour forme complexe : $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

S (C) = B $\Leftrightarrow ai\frac{\sqrt{3}}{3} + b = 1 \Leftrightarrow ia\sqrt{3} + 3b = 3$ (1)

S (A′) = C $\Leftrightarrow 2ai\frac{\sqrt{3}}{3} + b = i\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2ia\sqrt{3} + 3b = i\sqrt{3}$ (2)

(1) et (2) donnent : $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = \frac{6 - i\sqrt{3}}{3}$

c) $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{6-i\sqrt{3}}{3}}{-i\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$ (Vérifier sur le graphique).

3) a) f est une similitude indirecte de centre C et qui transforme B en A.

Soit k′ le rapport de f $\Rightarrow k' = \frac{CA}{CB} = \frac{1}{2}$.

b) Soit Δ l’axe de f ⇒ Δ est la bissectrice intérieure de l’angle [CB, CA].

4) a) Soit $\varphi = f \circ S$

φ est la composée de deux similitudes de natures différentes ⇒ φ est une similitude indirecte de rapport le produit des rapports $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ ⇒ φ est un antidéplacement

φ (A′) = C et φ (C) = A ⇒ φ o φ (A′) = A ≠ A′ ⇒ φ o φ ≠ id ⇒ φ n’est pas une symétrie axiale ⇒ φ est une symétrie glissante.

b) $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D

- φ o φ (A′) = A ⇒ $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC}$
- φ (C) = A ⇒ C ∗ A ∈ D ⇒ D est la droite passant par C ∗ A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$ ⇒ D = (AC).