Dérivabilité

$4^{ème}$ math **B.H.Hammouda Fethi**

A°/ Rappel :

Définition :

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ (fini)

l est appelé le nombre dérivée de f en a noté $f'(a)$.

Définition :

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a ssi

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l \text{ (fini) c.à.d } f_g'(a)=f_d'(a) .$$

Exercice :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases}\frac{x}{x-2} & si\ x\leq 1\\ (x-2)|x-2| & si\ x\succ 1\end{cases}$.

1) montrer que f est une fonction sur IR .
2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1 .
   b) Montrer que f est dérivable en 2 .
3) a) Préciser les tangentes à la courbe de aux points d'abscisse 0 et 2 .
   b) Préciser les demi tangentes au point d'abscisse 1.

INTERPRETATION GRAPHIQUE DE DERIVABILITE A COMPLETER ICI

Définition :

- Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout réel de I .
- Soit deux réels a et b tels que $a\prec b$:
  Une fonction est dérivable sur $[a,b]$ si elle dérivable sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b .
- On définit de façon analogue la dérivabilité d'une fonction sur les intervalle $[a,b[$, $]a,b]$ où a et b finis ou infinis .

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction F	Intervalle	F'
$x\to x^n$, $n\in IN\setminus\{0,1\}$	IR	$x\to nx^{n-1}$
$x\to\frac{1}{x^n}$, $n\in IN^*$	Tout intervalle $\subset IR$	$x\to -nx^{-n-1}$
$x\to\sin(ax+b)$	IR	$x\to a\cos(ax+b)$
$x\to\cos(ax+b)$	IR	$x\to a\sin(ax+b)$
$x\to\tan(ax+b)$	$ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x\to a(1+\tan^2(ax+b))$

Opération sur les fonctions dérivables :

Fonction F	Intervalle	F'
$f+g$	I	$f'+g'$

www.devoir@t.net

$af \quad$ où $\quad a \in IR$	I	af'
$f \times g$	I	$f'g + g'f$
$\frac{1}{f}$	$\mathrm{I} \subset \{x \in I ; f(x) \neq 0\}$	$\frac{-f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\subset \{x \in I ; g(x) \neq 0\}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$
$f^n \quad , \quad n \in IN \setminus \{0,1\}$	I	$nf'f^{n-1}$
$\frac{1}{f^n} \quad , \quad n \in IN^*$	$\mathrm{I} \subset \{x \in I ; f(x) \neq 0\}$	$-nf'f^{-n-1}$

B°/ Dérivabilité des fonction composées:

Rappel : ****

- Si f est continue sur I et $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .
- Si f est dérivable sur I et $f(x) \succ 0$ pour tout $x \in I$ alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I .

Exercice :

On considère la fonction $f : x \to \sqrt{x^2 - 1}$

Déterminer D_f

2) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, f est dérivable et calculer $f'(x)$.

3) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en -1.

4) Quel est domaine de dérivabilité de f .

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $f \circ g$ est dérivable en a et $(g \circ f)' = f'(a) \times g'(f(a))$.

Corollaire :

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $f \circ g$ est dérivable sur I et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$ pour tout x de I .

Exercice :

Dans chacun des cas suivant montrer que la fonction f est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée.

$f : x \to \sqrt{1 - \cos(\pi x)} \quad , \quad I =]0,2[\quad , \quad f : x \to \tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad I = [0,1[$.

C°/ Théorème des accroissements finis :

Théorème de Rolle :

Soit a et b deux réel tel que $a \prec b$. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel c de $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation graphique :

Si ζ_f est la représentation graphique de f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ alors il existe au moins une tangente à ζ_f parallèle à la droite des abscisses.

www.devoir@t.net

Exercice :

Soit la fonction définie sur IR par : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$, soit A et B les points de ζ_f d'abscisses respectives 3 et 0 . Existe –t-il des points de ζ_f où la tangente est parallèle à la droite des abscisses .

Théorème des accroissements finis :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ alors il existe un réel c de $]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Interprétation graphique :

Si ζ_f est la représentation graphique de f dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ alors il existe au moins une tangente à ζ_f parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points d'abscisses respectives a et b .

Inégalité des accroissements finis :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ .soit deux réels m et M .

Si $m\le f'(x)\le M$ pour tout x de $]a,b[$ alors $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$.

Corollaire :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M\succ 0$.

Si $|f'(x)|\le M$ pour tout x de I , alors $|f(b)-f(a)|\le M|b-a|$, pour tout réel a et b de I .

Exercice :

Soit $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $x:\to\tan x$.

1) Montrer que $1\le f'(x)\le 2$, pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
2) En déduire que $t\le\tan(t)\le 2t$.

D°/ Variation d'une fonction :

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f ' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I . alors f est strictement croissante sur I .
- Si f ' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I . alors f est strictement décroissante sur I .

Exercice :

Etudier les variation de $f:x\to\sqrt{1-\sin^3 x}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

E°/ Extrema :

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , et $a\in I$.

Si f admet un extremum local en a alors $f'(a)=0$.

Si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a .

Exemple :

www.devoir@t.net

Pour $f(x)=x^3$ on a $f'(x)=3x^2$, $f'(x)$ s'annule en 0 mais f n'admet pas d'extremum en 0 .

F°/ Point d'inflexion :

Définition1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel a de I et ζ_f sa courbe représentative dans un repère $(o,\vec{u},\vec{v})$.on dit que le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de ζ_f Si ζ_f traverse sa tangente en ce point .

Définition2 :

Soit f une fonction définie sur D_f et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o,\vec{u},\vec{v})$. Le point $I(a,b)$ est un centre de symétrie de ζ_f si pour tout $x \in D_f$ on a

* $2a-x \in D_f$.
* $f(2a-x)=2b-f(x)$.

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si f'' s'annule en a en changeant de signe ,alors le point $\mathrm{M}(a, f(a))$ est un point d'inflexion de ζ_f

Exercice :

Montrer que la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x^4-6x^2+1$ admet deux points d'inflexion .

www.devoir@t.net