Probabilités

$4^{\text{ème}}$ math **B.H.Hammouda Fethi**

Définition :

Soit $E=\{a_1,a_2,...a_n\}$ un ensemble à n élément et p un entier naturel non nul .

- L e nombre des p-uplet d'éléments de E est l'entier n^p .
- Le nombre de n-uplet d'élément de E deux à deux distincts est l'entier $n!$.
- Si $1\leq p\leq n$ alors
  - Le nombre de n-uplet d'élément de E deux à deux distincts est l'entier $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$.
  - Le nombre de des sous parties d'élément de E est l'entier $C_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

Activité 4 page 180 :

Probabilité sur un ensemble fini :

Définition :

Soit E l'univers d'une expérience aléatoire et P(E) l'ensemble des événements de E. On appelle probabilité sur E , toute application p de P(E) dans $[0,1]$ vérifiant :

- $P(E)=1$ (E est appelé évènement certain) et $P(\varnothing)=0$ ($\varnothing$ est appelé évènement impossible).
- Si A et B deux évènements de E tel que $A\cap B=\varnothing$ alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

Propriété :

Soit $(E,P(E),p)$ un espace probabilisé fini et A et B deux évènements de E.

- $p(\overline{A})=1-p(A)$ et $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
- Si $A\cap B=\varnothing$ alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
- Si $A_1,A_2,.......,A_k$ sont des événements deux à deux incompatibles (d'intersection vides) alors $p(A_1\cup A_2\cup.......\cup A_k)=p(A_1)+p(A_2)+.....+p(A_k)$.

Activité 2 page 182 :

Définition et théorème :

Soit E l'univers d'une expérience aléatoire dans une situation d'équiprobabilité et P(E) l'ensemble des parties de E. l'application p définie de P(E) dans $[0,1]$ par

$p(a)=\dfrac{1}{card(E)}$ .Pour tout évènement élémentaire a de E est une probabilité de E appelé probabilité uniforme.

Propriété :

Soit $(E,P(E),p)$ un espace probabilisé fini tel que la probabilité p est uniforme alors $p(A)=\dfrac{card(A)}{card(E)}$.

Exercice 2 page184 :

Probabilité conditionnelle :

Activité 2 page 186 :

Théorème :

Soit $(E,P(E),p)$ un espace probabilisé et B un évènement tel que $p(B)\neq 0$.L'application p_B de P(E) dans $[0,1]$, définie par $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ pour tout évènement A est une probabilité sur E. Le réel $p_B(A)$ est noté $p(A/B)$ on lit probabilité de A sachant B.

Définition :

On dit que deux évènements A et B sont indépendante lorsque $p(A\cap B)=p(A).p(B)$
Dans le cas où $p(B)\neq 0$,la réalisation de B n'influence pas celle de A c.à.d $p(A/B)=p(A)$

Activité 3 page 188 :

Principe de probabilités totales :

Soit $(E,P(E),p)$ un espace probabilisé.

- $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\overline{A})=p(B/A)\,p(A)+p(B/\overline{A})\,p(\overline{A})$.
- Si A , B et C trois évènements de E tel que $A\cup B\cup C=E$ et $A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$ et $C\cap B=\varnothing$ pour tout évènement H on a $p(H)=p(H\cap A)+p(H\cap B)+p(H\cap C)=$ $p(H/A)\,p(A)+p(H/B)\,p(B)+p(H/C)\,p(C)$

Aléas numérique:

Activité :

Un sac contient 7 jetons numéroté de 1 à 7 .On extrait au hasard et simultanément 2 jetons du sac, on se place dans les conditions d'équiprobabilité. On gagne 2 dinars pour chaque jeton portant un numéro impaire obtenue on perd 3 dinars pour chaque jetons portant un numéro paire obtenues .on désigne par X le gain algébrique (négatif ou positif) réalisé en une partie.

1) Quelle sont les valeurs possible de X.

2) Déterminer la probabilité de chaque valeur.

Vocabulaire :

- X est une variable aléatoire ou aléa numérique.
- Le tableau définit les lois de probabilité de X.

Définitions:

- Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé fini. On appelle variable aléatoire ou aléa numérique définit sur E toute application $X: E \to IR$.
- L'ensemble des valeurs prises par X est noté X (E) s'appelle l'univers d'image de E par X , X (E)= $\{x_1, x_2 \dots \dots . x_n\}$.
- L'évènement $\{\omega \epsilon E \; tel \; que \;\; X(\omega) = x_i\}$ est noté $(X = x_i)$.
- La loi de probabilité de X est l'application $p: X(E) \to [0,1]$ qui a tout $x_i \to p(X = x_i)$.

Définition : (Fonction de répartition).

Soit X un aléa numérique, on appelle fonction de répartition de X l'application $F: IR \to [0,1]$ qui à tout $x \to F(x) = p(X \leq x)$.

Application :

Donner et représenté la fonction de répartition définit dan l'activité 1 :

Espérance mathématique :

Définition :

Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définit sur E .On appelle espérance mathématique de X le réel noté E(X) définit par $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i)$

Variance et écart –type :

On appelle variance de X le réel noté par $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) \; - E^2(X)$. Et on appelle écart type de X le réel σ(X)= $\sqrt{V(X)}$.

Loi binomiale :

Activité 1 page 195

Théorème et définition:

Soit une expérience aléatoire constitué de n épreuves identiques , indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec. Soit p la probabilité de l'événement sucées .On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisées au cours des n épreuves .Alors la loi de probabilité de X est donnée par.

$p(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, où $k \in \{0,1,2,......n\}$ .On dit que X suit une loi binomial de paramètre (n,p).

Espérance et variance :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomial de paramètre n et p.

On a $E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$ et σ(X)= $\sqrt{V(X)}$.

Exemples de lois continues :

La loi uniforme :

Définition :

Soit un intervalle $[a,b]$ .la fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ est appelé densité de la loi de probabilité uniforme sur $[a.b]$.On appelle probabilité uniforme sur $[a.b]$ l'application qui à tout intervalle $[c.d]$ inclus dans $[a.b]$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d f(x)dx$.

Conséquences :

- Pour tout réel c de $[a.b]$, $p(\{c\})=\int_c^c f(x)dx=0$.
- Si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de $[c.d]$ dans $[a.b]$ alors $p(\overline{[c,d]})=1-p([c,d])$.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $[a.b]$ suit la loi de probabilité uniforme P si $p(c \le X \le d)=\dfrac{d-c}{b-a}$.

Fonction de répartition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme p sur l'intervalle $[a.b]$.

On appelle fonction de répartition de X l'application $F : IR \longrightarrow [0,1]$ définie

par : $\begin{cases} 0 & si\ x \prec a \\ p(a \leq X \leq x) = \dfrac{x-a}{b-a} & si\ x \in [a,b]. \\ 1 & si\ x \succ b \end{cases}$

La loi exponentielle :

Définition :

Soit λ un réel strictement positif .La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de la loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ , l'application p qui

- A tout intervalle $[c.d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c.d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx$.
- A tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,+\infty[) = e^{-\lambda c}$.

Conséquences :

- Pour tout réel c de $[a.b]$, $p(\{c\}) = \int_c^c f(x)dx = 0$.
- Pour tout $c \succ 0$, $p([0,c]) = \int_0^c f(x)dx = 1 - e^{-\lambda c}$.
- $p([c,+\infty[) = 1 - p([0,c])$.

Activité 2 page 199 :

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si

$p(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ et $p(X \geq c) = e^{-\lambda c}$.

Fonction de répartition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle p de paramètre λ .

On appelle fonction de répartition de X l'application $F : IR \longrightarrow [0,1]$ définie

par $\begin{cases} 0 & si \quad x \prec 0 \\ p(0 \leq X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \in [0,+\infty[\end{cases}$