Isométries du plan

$4^{\text{ème}}$ math **B.H.Hammouda Fethi**

I/***Définition et propriété :***

Une application f du plan dans lui-même est une isométrie si elle conserve les distances .c.à.d., si $f(M)=M'$ et $f(N)=N'$ alors $MN=M'N'$.

Conséquences :

- L'identité du plan id_p , les translations , les symétries orthogonales et les rotation sont des isométries .
- Les images de deux points distincts du plan par une isométrie sont deux points distincts .

Activité 3 page 37

Isométries et produit scalaires :

Théorème :

Une application du plan dans lui-même est une isométrie , ssi , elle conserve le produit scalaire c.à.d. f est une isométrie , ssi, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$ où $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$

Théorème :

Les isométrie conservent les mesures des angles géométrique c.à.d. $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$ où $f(A)=A'$, $f(B)=B'$ et $f(C)=C'$ (A, B et C sont des points distincts) .

Conséquences :

L'image par une isométrie de trois points non alignée sont trois points non alignés .

Théorème :

Soit f une isométrie , et $f(A)=A'$, $f(B)=B'$ et $f(C)=C'$ où A, B et C sont des points non alignés .Si $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère orthonormé alors $\left(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)$est un repère orthonormé.de plus si M à pour coordonnées (x,y) dans le repère$\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ alors $f(M)=M'$ à pour coordonnées (x,y) dans le repère $\left(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)$.

Théorème et définition :

* Une isométrie f est une bijection du plan dans lui-même et sa fonction réciproque f^{-1} est une isométrie .

- Si $f=S_\Delta$ alors $f^{-1}=S_\Delta$.
- Si $f=S_O$ alors $f^{-1}=S_O$.
- Si $f=t_{\vec{u}}$ alors $f^{-1}=t_{-\vec{u}}$.
- Si $f=R_{(O,\alpha)}$ alors $f^{-1}=R_{(O,-\alpha)}$.

* La composée de deux isométries est une isométrie .

* Soit f et g deux isométries . $g=f^{-1}$ ssi $f\circ g=id_p$, où id_p est l'identité du plan .

* Si f et g sont deux isométries , alors $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

* Soit f , g et h trois isométries .alors $f=g$ ssi $h\circ f=h\circ g$

Isométries et configuration :

Théorème :

Soit f une isométrie et A , B, C et D des points d'images respectives A' , B', C' et D' par f .

Si $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{C'D'}$

Conséquences :

- Une isométrie conserve le barycentre de deux points . En particulier une <u>isométrie conserve le milieu d'un segment .</u>
- L'image d'une droite par une isométrie est une droite .
- L'image d'un segment par une isométrie est un segment qui lui est isométrique .
- L'image de deux droites parallèles par une isométrie sont deux droites parallèles
- L'image d'un parallélogramme par une isométrie est un parallélogramme .
- L'image de deux droites perpendiculaires par une isométrie sont deux droites perpendiculaires .
- L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle qui lui est isométrique .
- L'image d'une droite tangente en M à un cercle par une isométrie est une tangente au cercle image , au point M' image de M .(les isométrie conservent le contact).

Activité 2 page 40 :

Isométries et points fixes :

Définition :

On dit qu'un point A est fixe par une isométrie si on a : $f(A)=A$.

Théorème :

Soit f une isométrie différente de l'identité , A un point non fixe de f et A' son image .
Alors les points fixes de f , s'ils existent , se trouvent sur la médiatrice du segment $[AA']$.

Théorèmes :

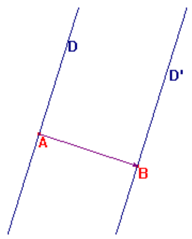
- Une isométrie fixe trois points non alignés ssi c'est id_p.
- Deux isométries qui coïncident sur trois points non alignés sont égales .
- Toute isométrie , distincts de id_p qui fixe deux points distincts A et B est une symétrie orthogonal d'axe (AB) .
- Toute isométrie qui fixe un seul point I est une rotation de centre I et d'angle non nul .

Composées de deux symétries orthogonales :

Théorème :

Soit D et D' deux droites .

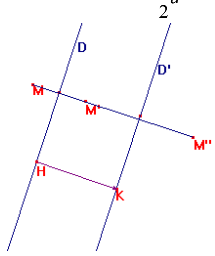
Si $D // D'$ alors $S_{D'} \circ S_D$ est une translation .



Si $\begin{cases} D // D' \\ A \in D \\ B \in D' \\ (AB) \perp D \end{cases}$ alors $S_{D'} \circ S_D = t_{2\overrightarrow{AB}}$

<u>Réciproquement</u>

Toute translation $t_{\vec{u}}$ est décomposable en produit de deux symétries orthogonales d'axe D et D' où Dest une droites quelconques orthogonal à $\vec{u}$ et $D' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$



$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\vec{u}$

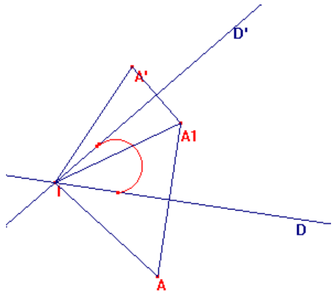
Activité 2 page 44 :

Activité 2 page 49 :

Théorème :

Soit D et D' deux droites de vecteurs directeur respective $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

Si $D \cap D' = \{I\}$ alors $S_{D'} \circ S_D$ est une rotation de centre I et d'angle $2\left(\vec{u}, \vec{u}'\right) \equiv \theta [2\pi]$



Réciproquement

Toute rotation $R_{(I,\theta)}$ est décomposable en produit de deux symétries orthogonales d'axe D et D' de vecteurs directeur respective $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ où Dest une droites quelconques passant par I et D' est la droite tel que $2\left(\vec{u}, \vec{u}'\right) \equiv \theta [2\pi]$

Conséquence :

Si $D \perp D'$ et $D \cap D' = \{I\}$ alors $S_{D'} \circ S_D = S_I$ où S_I est la symétrie central de centre I .et réciproquement toute symétrie central de centre I est décomposable en produit de symétries axiales S_D et $S_{D'}$ où D et D' sont perpendiculaire en I.

Activité 3 page 48 :

Isométries sans points fixes :

Théorème :

Une isométrie qui na aucun point fixe est soit une translation de vecteur non nul , soit la composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ et tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ .

Définition

La composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ est appelée ***symétrie glissante*** . $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta (M) = t_{\vec{u}} (M_1) = M'$