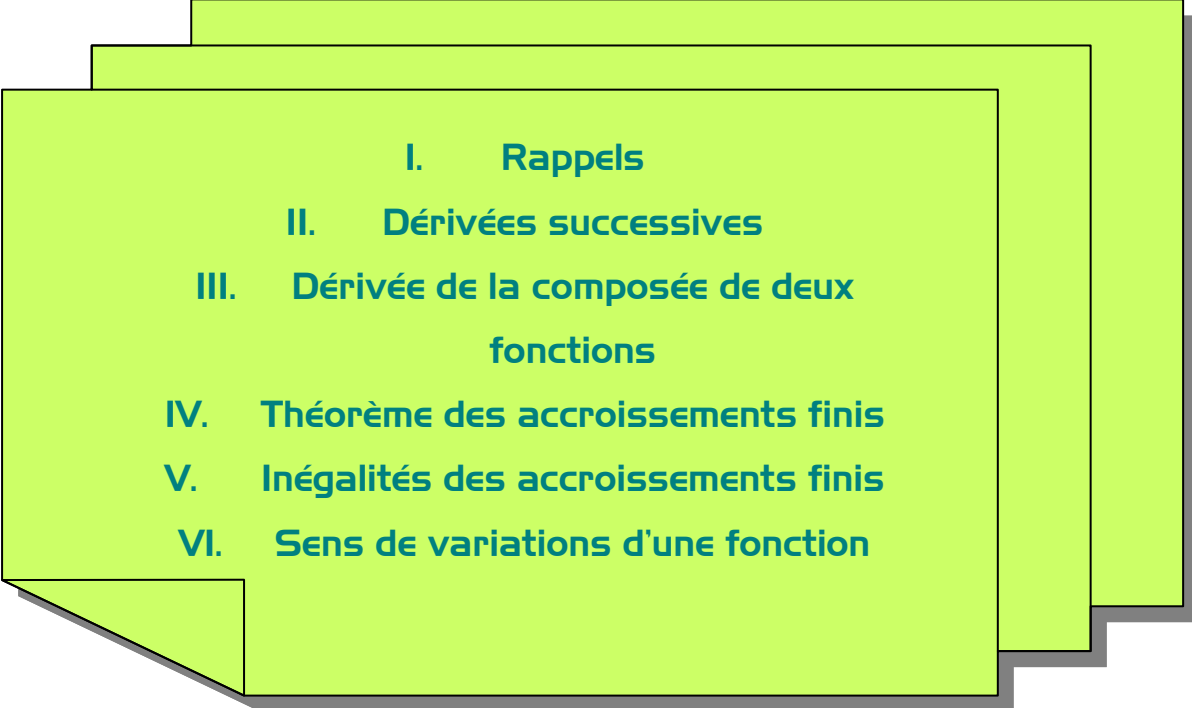

Dérivabilité

- 
- I. Rappels
 - II. Dérivées successives
 - III. Dérivée de la composée de deux fonctions
 - IV. Théorème des accroissements finis
 - V. Inégalités des accroissements finis
 - VI. Sens de variations d'une fonction

Dérivabilité

I. Rappels

I. Dérivabilité en un point

⚡ Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de centre a .
 f dérivable en $a \Leftrightarrow$ le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a ,
notée $f'(a)$ et appelée nombre dérivé de f en a

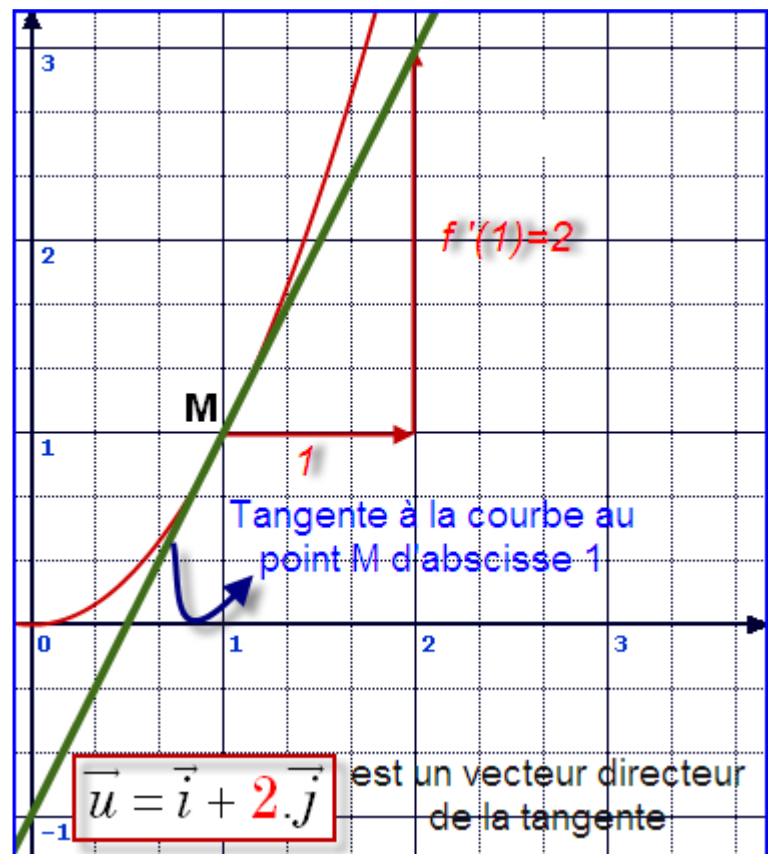
⚡ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + \alpha[$.
 f dérivable à droite en $a \Leftrightarrow$ le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie
à droite en a , notée $f'_d(a)$.

⚡ Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha, a]$.
 f dérivable à gauche en $a \Leftrightarrow$ le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite
finie à gauche en a , notée $f'_g(a)$.

Interprétation graphique et approximation affine :

- Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet, au point d'abscisse a , une tangente de coefficient directeur $f'(a)$
- $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente.
- Cette tangente admet pour équation cartésienne $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

La figure suivante représente la courbe d'une fonction f dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.



- Au voisinage du point $M(a, f(a))$, la courbe et la tangente sont presque confondues. Donc, sur un petit voisinage de a on peut assimiler la branche de la courbe de f à un segment (de la tangente).

Et de cette façon, on peut obtenir une approximation de $f(x)$ si x est proche de a en remplaçant $f(x)$ par $f'(a)(x - a) + f(a)$.

On dit alors que $f(a) + (x-a)f'(a)$ est l'approximation affine locale de $f(x)$.

Exemple1 : $f(x) = \sin x$. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$!

Donc pour x proche de 0 on a $\sin x \simeq 1 \cdot (x - 0) + \sin 0$ ou encore $\boxed{\sin x \simeq x}$

Exemple2 : $f(x) = \sqrt{1+x}$. f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$!

Donc pour x proche de 0 on a $\sqrt{1+x} \simeq f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$ ou encore $\boxed{\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}}$

- Si f est dérivable à droite en a alors la courbe représentative de f admet, au point d'abscisse a , une demi tangente de coefficient directeur $f'_d(a)$.
- De même si f est dérivable à gauche en a alors la courbe de f admet, au point d'abscisse a , une demi tangente de coefficient directeur $f'_g(a)$.

Dans la figure ci contre :

La fonction f est dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 2$.

f est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = -2$.

Remarque :

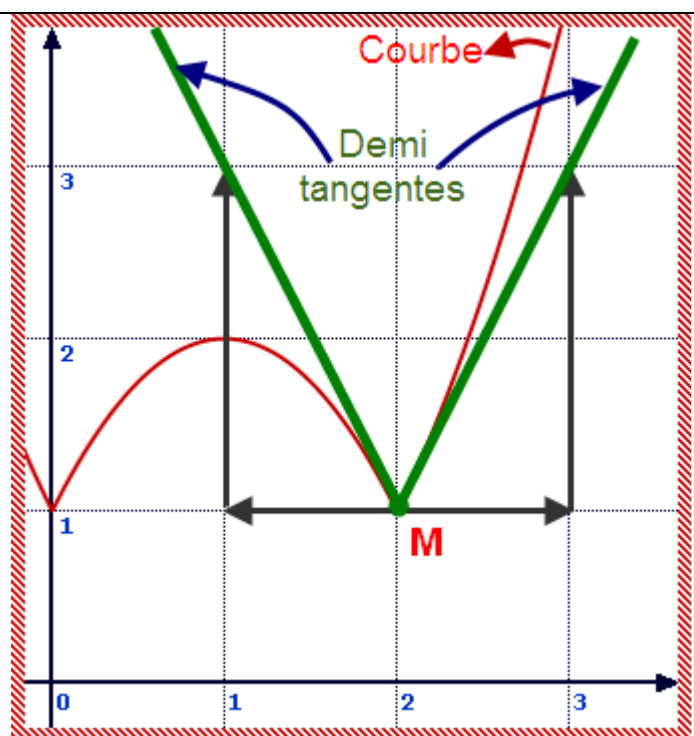
Dans le cas où f est dérivable à gauche en a , il est plus pratique

de choisir $\begin{pmatrix} -1 \\ -f'_g(a) \end{pmatrix}$ comme




vecteur directeur au lieu de

$\begin{pmatrix} 1 \\ f'_g(a) \end{pmatrix}$ (comme dans le cas de

cet exemple)



2. Dérivabilité sur un intervalle

-  On dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert, si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.
-  On dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .
-  L'application qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f .

3. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	Intervalle I	$f'(x)$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$	\mathbb{R}	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
\sqrt{x}	$] 0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(ax+b)$	\mathbb{R}	$a \cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	\mathbb{R}	$-a \sin(ax+b)$
$\tan(ax+b)$	$I \subset D_f$	$a(1 + \tan^2(ax+b))$

4. Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f + g$	I	$f' + g'$
$\alpha f \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	I	$\alpha f'$
$f \times g$	I	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{1}{f}$	Tout intervalle de $\{x \in I \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$	$\frac{-f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	Tout intervalle de $\{x \in I \text{ tel que } g(x) \neq 0\}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$
$f^n \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$	I	$nf' f^{n-1}$
$\frac{1}{f^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	Tout intervalle de $\{x \in I \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$	$\frac{-nf'}{f^{n+1}}$

II. Dérivées successives

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , sa fonction dérivée f' est appelée dérivée première de f ou dérivée d'ordre 1 de f .

Si f' est dérivable sur I , sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2, elle est notée f'' ou $f^{(2)}$

D'une façon récurrente, si $f^{(n-1)}$ ($n \geq 2$) est dérivable sur I , sa fonction dérivée est appelée dérivée $n^{\text{ème}}$ ou dérivée d'ordre n de f et notée $f^{(n)}$

Exercice

Soit la fonction $f : x \mapsto \cos x$

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout réel x on a :

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

Solution

• La fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout réel x

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ donc l'égalité est vraie à l'ordre 0.}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$ et montrons que

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = -\sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-x - n \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-x - n \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

III. Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et on a : $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

Démonstration

Soit la fonction h définie sur J par :

$$\begin{cases} h(y) = \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & \text{si } y \neq f(a) \\ h(f(a)) = g'(f(a)) \end{cases}$$

h est continue en $f(a)$ car g est dérivable en ce point

f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) = h(f(a)) = g'(f(a))$$

En plus, pour $x \neq a$ on a :

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \begin{cases} h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } f(x) \neq f(a) \\ 0 & \text{si } f(x) = f(a) \end{cases}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ car } f \text{ est dérivable en } a$$

Donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a)) \times f'(a)$

Conséquence

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Application (Dérivée de \sqrt{f})

Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

Si on pose $g(x) = \sqrt{x}$ alors $\sqrt{f} = g \circ f$

$$\begin{cases} f \text{ dérivable sur } I \\ g \text{ dérivable sur }]0, +\infty[\\ f(I) \subset]0, +\infty[\text{ car } f \text{ est strictement positive sur } I \end{cases}$$

Donc la fonction \sqrt{f} ($= g \circ f$) est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, (\sqrt{f})'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = f'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Retenons

Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la

fonction \sqrt{f} est dérivable sur I et pour tout $\forall x \in I, (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Exercice

Dans chacun des cas suivants donner le domaine de dérivabilité et définir la fonction dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ b) $f(x) = \cos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

Solution

a) Etudions le signe de $x^2 - 3x + 2$

On a $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$ donc les racines de ce trinôme sont 1 et 2

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
Signe de $x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+

Pour tout $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[, x^2 - 3x + 2 > 0$

La fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur \mathbb{R} et en particulier sur $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

Alors la fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ donc la fonction f est dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[, f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

b) Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$. On a $f = \cos \circ g$

La fonction g est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine

de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}$

En plus la fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

et $f'(x) = g'(x) \times (-\sin(g(x))) = \frac{2}{(x+1)^2} \sin\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$

IV. Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Démonstration

- Si f est constante sur $[a, b]$ alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$.
- Si f n'est pas constante sur $[a, b]$

f étant continue sur $[a, b]$ donc $f([a, b]) = [m, M]$ et par suite il existe α et β de $[a, b]$ tels que $f(\alpha) = m$ et $f(\beta) = M$

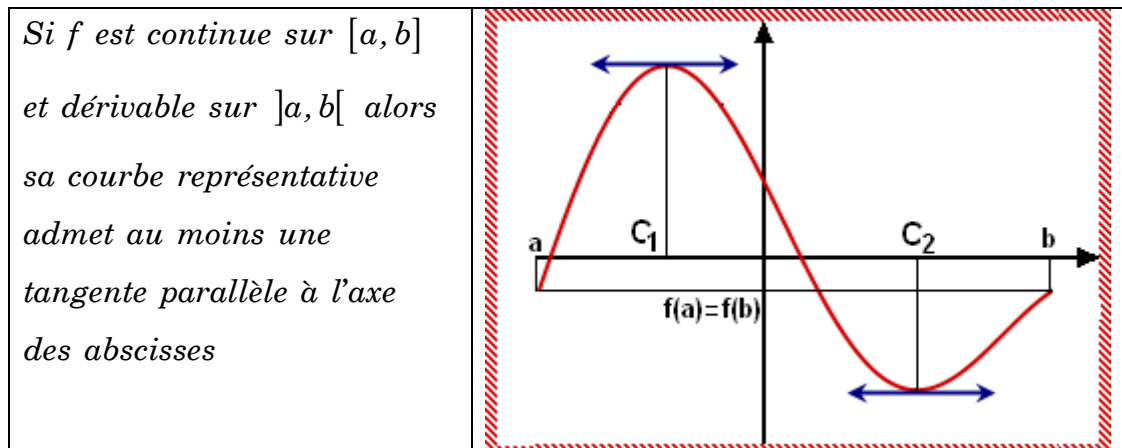
L'un au moins des réels α et β appartient à l'intervalle $]a, b[$ car f n'est pas constante sur $[a, b]$. Supposons que $\alpha \in]a, b[$

$$\forall x \in]a, \alpha[, \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{f(x) - m}{x - \alpha} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \leq 0$$

$$\forall x \in]\alpha, b[, \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{f(x) - m}{x - \alpha} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \geq 0$$

Ce qui donne $f'(\alpha) = 0$. Même raisonnement si on suppose que $\beta \in]a, b[$.

Interprétation graphique



Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Démonstration

Posons $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ pour tout $x \in [a, b]$

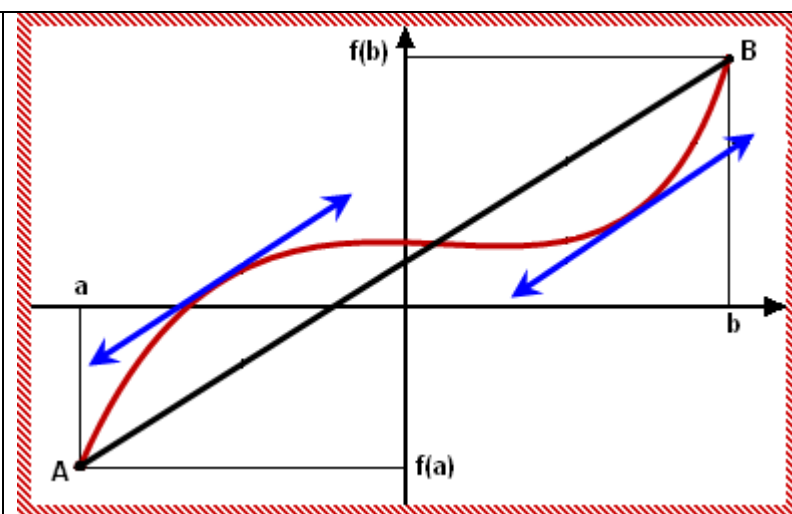
La fonction g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle donc il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$

g étant dérivable sur $]a, b[$ et pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Alors $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ donc $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Interprétation graphique

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors sa courbe représentative admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB) où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$



V. Inégalités des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$.

S'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$ alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

Démonstration

La fonction f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Or $m \leq f'(c) \leq M$ et $b - a > 0$ donc $m(b - a) \leq f'(c)(b - a) \leq M(b - a)$

D'où $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Corollaire

Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe $k \geq 0$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$ alors pour tous réels a et b de I , $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

Exercice

1) a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \leq \tan x$.

b) En déduire que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

2) a) Montrer que pour tous réels x et y de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $x < y$ on a :

$$\frac{y-x}{\cos^2 x} \leq \tan y - \tan x \leq \frac{y-x}{\cos^2 y}$$

b) En déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$.

Solution

1) a) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction tangente est dérivable sur l'intervalle $[0, x]$

et $\forall t \in [0, x]$, $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t$

On a $\forall t \in [0, x]$, $1 \leq \tan'(t) \leq 1 + \tan^2 x$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, $1 \cdot (x - 0) \leq \tan x - \tan 0 \leq (1 + \tan^2 x)(x - 0)$

D'où $\tan x \geq x$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} (x - \tan x) \leq 0$

(d'après la question précédente) donc f est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2) a) La fonction tangente est dérivable sur l'intervalle $[x, y]$ et

$\forall t \in [x, y]$, $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

$\forall t \in [x, y]$, $x \leq t \leq y \Rightarrow 0 < \cos^2 y \leq \cos^2 t \leq \cos^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \leq \tan'(t) \leq \frac{1}{\cos^2 y}$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\frac{y-x}{\cos^2 x} \leq \tan y - \tan x \leq \frac{y-x}{\cos^2 y}$

b) Il suffit d'appliquer l'encadrement précédent sur l'intervalle $[0, x]$ où $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

VI. Sens de variations d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si f' est strictement positive sur I alors f est strictement croissante sur I .

Si f' est strictement négative sur I alors f est strictement décroissante sur I .

Démonstration

Soient a et b deux réels de I tels que $a \neq b$.

f est dérivable sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$) donc il existe $c \in]a, b[$ (ou $c \in]b, a[$) tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \dots$$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I , alors f est strictement croissante sur I .

Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I , alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple

Considérons la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x$.

f est dérivable sur $[0, \pi]$ et $f'(x) = -\sin x \leq 0$.

Donc f est décroissante sur $[0, \pi]$

Et puisque f' s'annule seulement en 0 et π (en un nombre fini de points) on peut dire que f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$

Ce cours est destiné aux élèves des classes terminales section mathématiques conformément aux programmes officiels Tunisiens.

Vos suggestions et vos remarques m'intéressent beaucoup et seront les bienvenus

Copyright © Dhaouadi Nejib 2009 – 2010

<http://www.sigmaths.co.cc>

