

Limites et Continuité

I. Rappels et compléments:

1) Limite en l'infini :

a) Limite infinie :

Définition :

Soit f une fonction définie sur $I = [a ; +\infty[$. Dire que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ signifie que pour tout $A > 0$, il existe un réel $B > 0$ tel que : $f(x) > A$ dès que $x > B$ et $x \in I$.

b) Limite finie :

Définition :

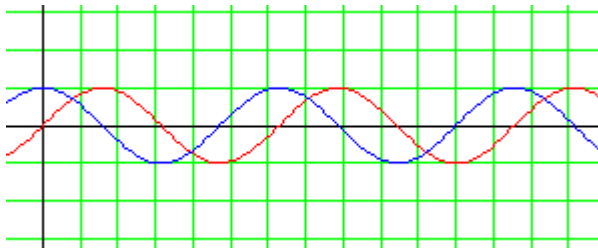
Soit f une fonction définie sur $I = [a ; +\infty[$. Dire que la limite de f en $+\infty$ est l signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $B > 0$ tel que : $|f(x) - l| < \varepsilon$ dès que $x > B$ et $x \in I$.

Note : Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite D d'équation $y = l$.

On dit alors que D est une **asymptote horizontale** à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

c) Sans limite !

Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque x tend vers $+\infty$. C'est par exemple le cas avec les fonctions sinus et cosinus :



Lorsque x s'en va vers $+\infty$, **sinus** et **cosinus** n'ont aucune limite finie ou infinie...

2) Limite en un point :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a . Dire que la limite de f en a est $+\infty$ signifie que pour tout $A > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $f(x) > A$ dès que $|x - a| < \alpha$ et $x \in I$.

Note : Lorsque x tend a , la courbe de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite D d'équation $x = a$.

On dit alors que D est une **asymptote horizontale** à la courbe de f au voisinage de a .

Nous avons exclusivement évoqué des fonctions qui tendent vers $+\infty$ à l'approche d'un point. Mais il existe aussi des fonctions qui ont pour limite $-\infty$. C'est à peu près pareil.

3) Limite à gauche et limite à droite :

Définition :

Soit f une fonction définie sur $I = [a ; a+r[$, $r > 0$ (respectivement $]a-r ; a]$).

Dire que la limite de f à droite (respectivement) en a est $+\infty$ signifie que pour tout $A > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $f(x) > A$ dès que $0 < x - a < \alpha$ (respectivement $0 < a - x < \alpha$) et $x \in I$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur $I = [a ; a+r[$, $r > 0$ (respectivement $]a-r ; a]$). Dire que la limite de f à droite (respectivement à gauche) en a est l signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $|f(x) - l| < \varepsilon$ dès que $0 < x-a < \alpha$ (respectivement $0 < a-x < \alpha$) et $x \in I$.

Remarque :

On définit de même le cas où f tend vers $-\infty$.

Théorème :

$\lim_{x \rightarrow a} f = l$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f = \lim_{x \rightarrow a^-} f = l$ (l finie ou infinie).

4) Limites des fonctions usuelles :

Fonction	Ensemble de définition	Limite en $-\infty$	Limite en 0	Limite en $+\infty$
x	$] -\infty ; +\infty [$	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$] -\infty ; +\infty [$	$+\infty$	0	$+\infty$
x^3	$] -\infty ; +\infty [$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$	0	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	0
\sqrt{x}	$[0 ; +\infty [$		0	$+\infty$
$\sin(x)$ $\cos(x)$	$] -\infty ; +\infty [$	N'existe pas	0 1	N'existe pas

5) Opérations sur limites des fonctions :

a) Limite d'une somme :

Limite de f	Limite de g	Limite de f + g
l	l'	l + l'
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Indéterminée

b) Limite d'un produit.

Limite de f	Limite de g	Limite de $f \cdot g$
1	l'	$1 \times l'$
$l \neq 0$	∞	∞ (avec la R.S)
∞	∞	∞ (avec la R.S)
0	∞	Indéterminée

R.S = règle de signe

c) Limite d'un quotient.

Par rapport à multiplication, la division ajoute le fait qu'on ne peut pas diviser par 0.

Limite de f	Limite de g	Limite de f / g
1	$l' \neq 0$	$\frac{1}{l'}$
1	∞	0
∞	l'	∞ (avec la R.S)
∞	∞	Indéterminée
1	0	∞ (avec la R.S)
∞	0	∞ (avec la R.S)
0	0	Indéterminée

1) Limite d'un polynôme ou rationnelle :

Théorème :

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Théorème :

Soit f , g , et h trois fonctions

On suppose que pour x assez grand, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

Alors si les fonctions g et h ont la même limite L en l'infini, la fonction f à l'infini est aussi égale à L

Théorème :

* Toute fonction polynôme est continue en tout réel.

* Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.

* Les fonctions $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \sin(ax+b)$ sont continues en tout réel.

Théorème :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

- * Si f est continue en a alors les fonctions αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), et f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en a .
- * Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{f}$, f^n ($n \in \mathbb{Z}^*$) sont continues en a .
- * Si f et g sont continues en a alors $f+g$ et $f \times g$ sont continues en a .
- * Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a .
- * Si f est positive sur I et f est continue en a , alors la fonction \sqrt{f} est continue en a .

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut être en un réel a de I .

S'il existe une fonction g définie sur l'intervalle I et continue en a telle que $g(x) = f(x)$ pour $x \neq a$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$.

Théorème :

Soit I un intervalle ouvert et a un réel de I et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.

Si la fonction f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a , on dit que f est prolongeable

par continuité en a et la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue en a .

La fonction g est appelée le prolongement par continuité de f en a .

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et sauf peut être en un réel a de I .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$.

Soit a un réel.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a-h, a[$ ($h > 0$).

f est continue à gauche en a , si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, a+h[$ ($h > 0$).

f est continue à droite en a , si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

f est continue en a , si et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a .

Définitions :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I .

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I .

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$.

On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b .

- De même on définit la continuité de f sur les intervalles suivants :

$[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$.

II. Branches infinies :

Définitions (Rappels)

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I et C_f sa courbe représentative dans un repère.

Si la limite de f , à droite en a (respectivement à gauche en a), est infinie, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f , à droite en a (respectivement à gauche en a).

* Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$), on dit que la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$).

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$).

Théorèmes (Rappels et compléments)

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Lorsque la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est infinie, pour déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$, on peut procéder de la manière suivante : on cherche

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie alors C_f admet une branche parabolique de direction celle de (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors C_f admet une branche parabolique de direction celle de (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) alors on cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ et :
 - Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
 - Si $(f(x) - ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ (on dit aussi que C_f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$)

On peut procéder de la même façon pour la recherche de la nature de la branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $-\infty$ lorsque la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ est infinie.

III. Continuité et limite d'une fonction composée :

1) Composée de deux fonctions :

Définition :

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et V une fonction définie sur un intervalle J tel que $u(I)$ est inclus dans J .

La fonction notée $v \circ u$, définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$ est appelée fonction composée de u et v .

2) Continuité d'une fonction composée :

Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a .
Soit v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $u(a)$.
Si u est continue en a et v continue en $u(a)$ alors la fonction $v \circ u$ est continue en a .

3) Limite d'une fonction composée :

Théorème :

Théorème : Soit f et g deux fonctions. a , L et L' trois réels éventuellement égaux à $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \\ \lim_{t \rightarrow L} g(t) = L' \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L'$

IV. Limite et ordre :

Théorème :

Soit I un intervalle ouvert, a un réel de I , f , u et v trois fonctions définies sur I ou $I \setminus \{a\}$.

- Si $u(x) \leq v(x)$ pour tout x de $I \setminus \{a\}$ et si u et v ont des limites finies en a alors $\lim_{x \rightarrow a} u \leq \lim_{x \rightarrow a} v$.
- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout x de $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{x \rightarrow a} u = \lim_{x \rightarrow a} v = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f = \ell$.

Ces résultats restent encore valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a .

Théorème :

Soit I un intervalle ouvert, a un réel de I , f et u deux fonctions définies sur I ou $I \setminus \{a\}$.

- 1) Si $f(x) \geq u(x)$ pour tout x de $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{x \rightarrow a} u = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$.
- 2) Si $f(x) \leq u(x)$ pour tout x de $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{x \rightarrow a} u = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f = -\infty$.

Ces résultats restent encore valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a .

V. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème : (Rappel)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème (admis) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ ($a < b$), il existe au moins deux réels α et β $[a, b]$ tels que $f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$

$f(\alpha)$ est la valeur minimale de f sur $[a, b]$.

$f(\beta)$ est la valeur maximale de f sur $[a, b]$.

On dit que f atteint ses bornes en α et β .

Théorème : (Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Conséquence :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ ($a < b$).

Si l'on a $f(a), f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I .

www.web-techno.com/masmaths

