

Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace

Soient A, B et C trois points quelconques de l'espace.

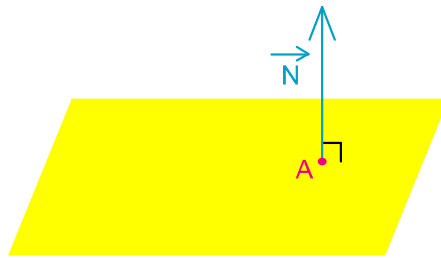
$$\text{On a : } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \hat{BAC}$$

Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée

de l'espace et $\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$$

Le plan passant par A et de vecteur normal \vec{N} , est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0$



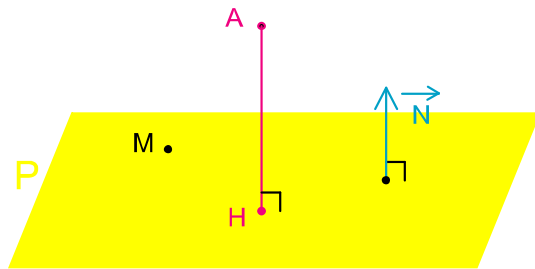
Soit le plan P d'équation : $a x + b y + c z + d = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Le vecteur $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

Soient le plan $P : a x + b y + c z + d = 0$,

$A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur P .

Soit M un point de P et $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un



vecteur normal à P .

La distance du point A au plan P est le réel défini par :

$$d(A, P) = AH = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

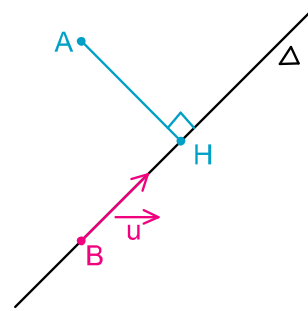
(D) une droite de l'espace de vecteur

directeur \vec{u} et passant par B .

A un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur (D).

La distance du point A à la droite (D) est le réel défini par : $d(A, (D)) = AH$.

$$AH = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

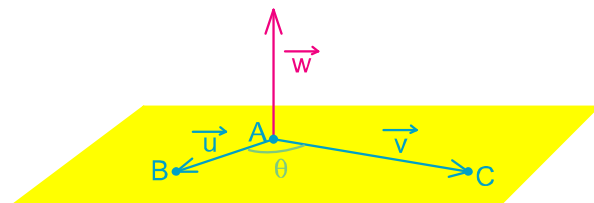


Définition :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace orienté et A, B et C trois points tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$. On appelle produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} , le vecteur \vec{w} , noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

- * Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors $\vec{w} = \vec{0}$.
- * Sinon alors

- 1/ \vec{w} est normal au plan (ABC)
- 2/ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe
- 3/ $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{BAC})$



Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls et non colinéaires de l'espace.

Soit θ une mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) .
On a :

$$\sin \theta = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on

considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}. \\ &= (y z' - z y') \vec{i} - (x z' - z x') \vec{j} + (x y' - y x') \vec{k} \end{aligned}$$

Soit P un plan de vecteurs directeurs

\vec{u} et \vec{v} .

Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan P.

Soient A, B et C trois points de l'espace.

L'aire du triangle ABC est :

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|.$$

Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est $\mathcal{V} = |(\vec{AB} \wedge \vec{AD}) \cdot \vec{AE}|$.

Le volume d'un un tétraèdre ABCD est $\mathcal{V} = \frac{1}{6} |(\vec{BC} \wedge \vec{BD}) \cdot \vec{BA}|$.

Visitez **Tunisie-Mathématiques** à l'adresse **<http://tunimath.clanfree.net>**