Les Fonctions logarithmes

La fonction logarithme népérien

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule ne 1.

Donc :

ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

$\ln(x)=\ln(y) \Leftrightarrow x=y$

$y=e^{x} \Leftrightarrow x=\ln(y)$

$e^{\ln x}=x$ avec $x>0$

$\ln(e^{x})=x$

Les propriétés de la fonction ln

Pour tout x, y de $\mathbb{R}_{+}^{*}$

- $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$, $\ln\frac{1}{x}=-\ln(x)$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$, $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$

- Pour tout p de $\mathbb{Z}$, $\ln(x^{p})=p\cdot\ln(x)$

Dérivabilité et continuité de la fonction ln

ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

pour tout x > 0, que $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

Approximation affine au voisinage de 1

- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ ou $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$

Remarque, une équation de la tangente à la courbe C_{ln} est : $y=x-1$

Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}x\ln(x)=0^{-}$

Étude du sens de variation de $\ln$ et étude de la fonction $\ln \circ u$

$\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ avec $x>0$ donc $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

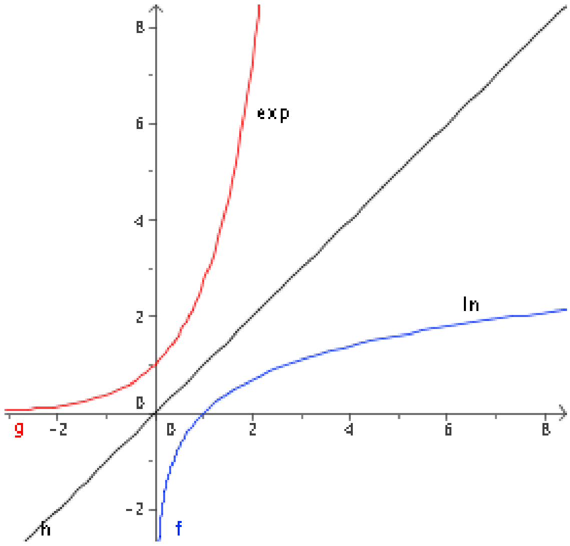
Donc :

$a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(a)>\ln(b) \Leftrightarrow a>b$

$\ln a>0 \Leftrightarrow a>1$, $\ln a<0 \Leftrightarrow 0<a<1$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

Si u est dérivable et strictement positive sur I alors $f=\ln \circ u$ et définie et dérivable sur I et on a $\forall x \in I$, $f'(x)=u'(x) \cdot \dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$



C_{ln} est le symétrique de C_{exp} par la droite d'équation $y=x$

Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $]0;+\infty[$ par $\log(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

On a donc $\log(1)=0$ et $\log(10)=1$.

Toutes les propriétés algébriques de la fonction $\ln$ sont vérifiées par la fonction $\log$.

En particulier, on a $\log(10^n)=n$.