I- Définition :

I-1. Exemple :

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules. On appelle X le nombre de boules blanches restant dans l'urne. Quelles sont les valeurs possibles pour X ? Avec quelles probabilités ?

X peut prendre les valeurs 3, 4, 5 ou 6 et on note : $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$

(X = 3) : " tirer 3 boules blanches ",
(X = 4) :" tirer une boule noire et 2 boules blanches "
(X = 5) : " tirer deux boules noires et une boule blanche ".
(X = 6) : " tirer trois boules noires ".

Les événements (X = 3), (X = 4), (X = 5) et (X = 6) sont incompatibles deux à deux et leur réunion est l'univers Ω.

$P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$, $P(X=4) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$, $P(X=5) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$

et $P(X=6) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$.

Les résultats peuvent se présenter dans le tableau :

x_i	3	4	5	6	
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$	1

Ce tableau définit la loi de probabilité de X.

I-2. Aléa numérique – Loi de probabilité

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ un univers muni d'une probabilité P.

Un aléa numérique X défini sur Ω est une application qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Désignons par $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ l'ensemble des valeurs prises par X où $m \leq n$.

La loi de probabilité de X est l'application qui à tout élément x_i de X(Ω) associe la probabilité $p_i = P(X = x_i)$ que X prenne cette valeur x_i.

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	…	x_m	
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_m	1

I-3. Fonction de répartition

Définition :

La fonction de répartition F de X est :

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$$
$$x \mapsto F(x) = P(X \leq x)$$

Reprenons l'exemple précédent :

Intervalles des valeurs de x	Valeurs de X vérifiant $X \le x$	$F(x) = P(X \le x)$
$]-\infty, 3[$	Aucune	0
$[3,4[$	3	$p_1 = \frac{5}{30}$
$[4,5[$	3 et 4	$p_1 + p_2 = \frac{5}{30} + \frac{15}{30} = \frac{20}{30}$
$[5,6[$	3 , 4 et 5	$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{29}{30}$
$[6,+\infty[$	3 , 4 , 5 et 6	$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

Question : Calculer $P(X < 5)$, $P(X > 4)$ et $P(3 < X \le 5)$

Réponse : $P(X < 5) = P(X \le 4) = F(4) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4) = \frac{1}{2}$.

$P(3 < X \le 5) = P(4 \le X \le 5) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$.

II- Espérance mathématique, variance et écart-type

II-1. Espérance mathématique :

Définition : On appelle espérance mathématique de X le réel $E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$.

Retour à l'exemple :

$$E(X) = 3.\frac{5}{30} + 4.\frac{15}{30} + 5.\frac{9}{30} + 6.\frac{1}{30} = \frac{21}{5} = 4{,}2 .$$

Propriétés :

1. Si $E(X) > 0$, alors on dit que l'épreuve est gagnante (ou favorable)
2. Si $E(X) = 0$, alors on dit l'épreuve est équitable.
3. Si $E(X) < 0$, alors on dit que l'épreuve est favorable ;

Exercice 1

Une urne contient trois boules vertes portant le numéro 0, deux boules rouges portant le numéro 5 et une boule noire portant le numéro a (a est un entier naturel non nul, différent de 5 et de 10).

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un joueur tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il tire :
   a) trois boules de la même couleur,
   b) trois boules de couleurs différentes,
   c) deux boules et deux seulement de la même couleur.
2. Le joueur reçoit, en dinars, la somme des numéros marqués sur les boules tirées.

Les gains possibles du joueur sont donc :

0 ; 5 ; 10 ; a ; 5 + a ; 10 + a.

a) Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a.
c) Calculer a pour que l'espérance de gain du joueur soit de 20 dinars.

Exercice 2

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
A la gare A, 16 voyageurs ont pris chacun un billet dont :
7 pour la gare B (prix du billet 5 dinars)
5 pour la gare C (prix du billet 6 dinars)
4 pour la gare D (prix du billet 7,5 dinars)
1. On choisit au hasard un de ces voyageurs.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque voyageur le prix de son billet (en dinars).
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.
2. On choisit au hasard trois de ces voyageurs.
a) Calculer la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.
b) Calculer la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B.
c) Quelle est la probabilité pour que cette destination soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination.

CORRECTION

Exercice 1

Epreuve : tirage simultané de 3 boules dans une urne comportant 6 boules.
Les boules étant indiscernables au toucher, nous sommes dans l'hypothèse d'équiprobabilité.
Il s'ensuit : $\text{Card}\Omega = C_6^3 = 20$.
1. a) Soit A l'événement : « les trois boules sont de la même couleur ». A se traduit par : « les trois boules sont vertes ».
Donc $p(A) = \dfrac{C_3^3}{20} = \dfrac{1}{20}$.
b) Soit B l'événement : « les trois boules sont de couleurs différentes ». B se traduit par : « une boule verte et une boule rouge et une boule noire ».
Donc, $p(B) = \dfrac{C_3^1 C_2^1 C_1^1}{20} = \dfrac{3}{10}$.
c) Soit C l'événement : « deux boules et deux seulement sont de la même couleur ».
C s'écrit : $C = \overline{A \cup B}$.
$p(C) = 1 - p(A \cup B)$ avec A et B incompatibles.
Donc : $p(C) = 1 - (p(A) + p(B)) = \dfrac{3}{20}$.
2. a) $X(\Omega) = \{0,5 ; 10 ; a ; 5+a ; 10+a\}$ avec a entier non nul, différent de 5 et de 10.
$p(X = 0) = p(A) = \dfrac{1}{20}$;

$p(X = 5) = p(\text{2 vertes et 1 rouge}) = \dfrac{C_3^2 C_2^1}{20} = \dfrac{3}{10}$;

$p(X = 10) = p(\text{1 verte et 2 rouges}) = \dfrac{C_3^1 C_2^2}{20} = \dfrac{3}{20}$;

$p(X = a) = p(\text{2 vertes et 1 noire}) = \dfrac{C_3^2 C_1^1}{20} = \dfrac{3}{20}$;

$p(X = 5+a) = p(B) = \dfrac{3}{10}$;

$p(X = 10 + a) = p(\text{2 rouges et 1 noire}) = \dfrac{C_1^2 C_1^1}{20} = \dfrac{1}{20}$.

D'où la loi de X :

x_i	0	5	10	a	5+a	10+a
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$

Remarquons que $p(X = 0) + p(X = 5) + p(X = 10) + p(X = a) + p(X = 5+a) + p(X = 10 + a)$ est bien égal à 1.

b) $E(X) = 0 \times p(X = 0) + 5 \times p(X = 5) + 10 \times p(X = 10) + a \times p(X = a) + (5+a) \times p(X = 5+a) + (10+a) \times p(X = 10 + a) = 5 + \dfrac{a}{2}$.

c) $E(X) = 20$ si et seulement si $a = 30$.

Exercice 2

1. X désigne la variable aléatoire correspondant au prix du billet de chacun des voyageurs.

a) Sur les 16 voyageurs qui ont pris un billet, 7 l'ont pris pour la gare B au prix de 5 dinars.

Donc : $p(X = 5) = \dfrac{7}{16}$.

5 ont pris un billet pour la gare C au tarif de 6 dinars. Nous pouvons donc en déduire que : $p(X = 6) = \dfrac{5}{16}$.

Enfin, 4 ont pris un billet à 7,5 dinars pour la gare D, donc : $p(X = 7{,}5) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

La loi de probabilité de X est donc la suivante :

x_i	5	6	7,5
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$

b) L'espérance mathématique de X est donnée par :

$E(X) = 5 \times p(X = 5) + 6 \times p(X = 6) + 7{,}5 \times p(X = 7{,}5) = \dfrac{95}{16}$.

2. a) On choisit au hasard trois voyageurs. Nous avons $C_{16}^3 = 560$ façons de choisir trois voyageurs.

Notons A l'événement « les trois voyageurs ont des destinations différentes ».

Nous avons donc : $p(A) = \dfrac{C_7^1 C_5^1 C_4^1}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{4}$.

b) Calculons tout d'abord la probabilité de l'événement D : « aucun des voyageurs n'a un billet pour la gare B ».
Nous avons 9 personnes dont la destination est différente de la gare B, donc :

$p(D) = \dfrac{C_9^3}{C_{16}^3} = \dfrac{3}{20}$.

L'événement « un voyageur au moins a un billet pour la gare B » est l'événement contraire de D. Or, $p(\overline{D}) = 1 - \dfrac{3}{20} = \dfrac{17}{20}$.

La probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B est égale à $\dfrac{17}{20}$.

c) Calculons tout d'abord la probabilité que les trois voyageurs aient la même destination (événement E). Ceux-ci peuvent aller soit à la gare B, soit à la gare C, soit à la gare D. Ces trois événements étant incompatibles, nous avons donc :

$p(E) = \dfrac{C_7^3}{C_{16}^3} + \dfrac{C_5^3}{C_{16}^3} + \dfrac{C_4^3}{C_{16}^3} = \dfrac{7}{80}$.

La probabilité que les trois voyageurs aillent à la gare B (événement F) est :

$p(F) = \dfrac{35}{760} = \dfrac{1}{16}$.

L'événement « la destination est B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination » correspond à l'événement F|E.

Or, $p(F/E) = \dfrac{p(F \cap E)}{p(E)} = \dfrac{p(F)}{p(E)} = \dfrac{5}{7}$.

III- Variance et écart-type :

Définition :

On appelle variance de X le réel positif $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - (E(X))^2$

On appelle écart-type de X le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Retour à l'exemple :

x_i	3	4	5	6	
p_i	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$	1
$x_i \cdot p_i$	$\frac{15}{30}$	$\frac{60}{30}$	$\frac{45}{30}$	$\frac{6}{30}$	4,2
$x_i^2 . p_i$	$\frac{45}{30}$	$\frac{240}{30}$	$\frac{225}{30}$	$\frac{36}{30}$	18,2

$V(X) = 18{,}2 - (4{,}2)^2 = 0{,}56$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}56}$.

IV- Schéma de Bernoulli

Exemple :

On dispose d'une pièce de monnaie pipée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit le double d'obtenir "face". On déclare qu'il y a succès, noté S, si le résultat est pile, sinon il y a échec noté E.

Comme $P(S) + P(E) = 1$ et $P(S) = 2P(E)$ alors $P(S) = \frac{2}{3}$ et $P(E) = \frac{1}{3}$.

Lançons deux fois de suite la pièce ; on peut supposer que le résultat du second lancer est indépendant de celui du premier lancer. Soit A :" obtenir exactement un seul succès " alors $A = \{(S, E), (E, S)\}$ et donc

$P(A) = 2.P(S).P(E) = 2.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

Lançons à présent trois de suite la pièce ; on peut supposer que les résultats des différents lancers sont indépendants. Soit A' :" obtenir exactement un seul succès " alors $A' = \{(S , E , E) , (E , S , E) , (E ,E , S)\}$ et donc

$P(A') = 3.P(S).(P(E))^2 = 3.\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli l'expérience qui consiste à répéter n fois de suite une épreuve à deux issues possibles sous l'hypothèse suivante : les résultats de deux épreuves sont indépendants.

Lançons à présent n fois de suite la pièce $(n > 1)$ et désignons par X l'aléa numérique qui à toute série de n lancers associe le nombre de succès obtenus.
Calculons la probabilité des événements suivants :
$(X = n)$, $(X = 1)$ et $(X = k)$, où $0 \le k \le n$.

Réponse :

On a : $P(X = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $P(X = 1) = n\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ et $P(X = k) = C_n^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$.

Retenons :

Soit un série de n épreuves de Bernoulli avec, pour chaque épreuve, la probabilité d'un succès est p.
Le nombre de succès réalisés au cours d'une série de n épreuves est un aléa numérique X telle que sa loi de probabilité suit la loi binomiale de paramètres n et p définie par :

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad , \text{ où } k \in \{0,1,2,\dots,n\} .$$

Et on a : $E(X) = n.p$ et $V(X) = n.p.(1 - p)$.

Exercice 1:

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher dont quatre sont blanches, numérotées 0, 0, 1, 2 e 5 sont rouges, numérotées 0, 0, 1, 1, 2.
Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.

1. a) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « les deux boules tirées sont de même couleur »

B : « les deux boules tirées portent le même numéro ».

b) Sachant que les deux boules tirées sont de même couleur, quelle est la probabilité pour qu'elles portent le même numéro ?

2. Soit X l'aléa numérique prenant pour valeur le produit des numéros parqués sur les deux boules tirées. On désigne par E l'événement « X est différent de 0 ».

Montrer que $P(E) = \dfrac{5}{18}$.

3. On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Calculer la probabilité p que l'événement $(X = 0)$ soit réalisé au moins une fois.

Exercice 2

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

U_1 contient 2 boules rouges et 8 boules blanches

U_2 contient une boule rouge et deux boules blanches.

1. Une épreuve consiste à tirer une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis on tire une boule de U_2. On considère les événements suivants :

   R_1 : « la boule tirée de U_1 est rouge » et R_2 : «la boule tirée de U_2 est rouge »

   A : « à la fin de l'épreuve, U_2 ne contient plus de boule rouge ».

   a) Calculer $P(R_1)$ et $P(R_2)$.

   b) Montrer que $P(A) = \dfrac{1}{5}$.

2. On répète l'épreuve précédente quatre fois d suite en remettant chaque fois les boules tirées dans leurs urnes d'origine. On considère l'aléa numérique X défini par le nombre de fois où A est réalisé.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Déterminer l'espérance mathématiques et la variance de X.

3. Une nouvelle épreuve consiste à tirer une boule de U_1 :

   - Si elle est rouge, on la garde et on tire une seconde boule de U_2
   - Si elle est blanche, on la remet dans U_2 et on tire simultanément deux boules de U_2.

Soit Y l'aléa numérique égal au nombre de boules rouges obtenues à l'issue d'une épreuve.

   a) Calculer $P(Y = 0)$ et $P(Y = 2)$.

   b) En déduire $P(Y = 1)$.

Exercice 3 :

n étant un entier naturel non nul.

Une urne U_1 contient 2 boules blanches et n boules noires.

Une urne U_2 contient n boules blanches et 2 boules noires.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boue de U_1 puis on tire également une boule de U_2.

1. On suppose que $n = 1$.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
B : « tirer au moins une boule blanche »

b) On répète l'épreuve précédente 4 fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois deux boules de même couleur ?

2. On suppose que n est supérieur ou égal à 2. On désigne par X le nombre total de boules blanches qui restent dans les deux urnes U_1 et U_2.

a) Prouver que $P(X = n+2) = \dfrac{2n}{(n+2)^2}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Déterminer l'entier n pour lequel E(X) = 3.

Exercice 4 :

Une urne U_1 contient 4 boules blanches et 2 boules noires et une urne U_2 contient 3 boules blanches et 3 boules noires. Une épreuve consiste à tirer une boule et l'urne U_1 que l'on met dans U_2 puis tirer une boule de l'urne U_2 que l'on met dans U_1.

Soient A, B, C les événements suivants :

A : « à l'issue de cette épreuve la boule tirée de U_1 est blanche et la boule tirée de U_2 est blanche ».

B : « à l'issue de cette épreuve la boule tirée de U_1 est noire et la boule tirée de U_2 est noire ».

C : « à l'issue de cette épreuve les deux U_1 et U_2 se retrouvent chacune avec la même configuration de départ, c'est-à-dire que l'urne U_1 contient 4 boules blanches et 2 boules noires et l'urne U_2 contient 3 boules blanches et 3 boules noires ».

3. a) Calculer P(A) et P(B).

b) Montrer que $P(C) = \dfrac{4}{7}$.

2. On répète l'épreuve précédente 4 fois de suite et on désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeurs :

- 0 si l'événement C n'est pas réalisé au cours des 4 épreuves
- k si l'événement C est réalisé pour la première fois à la $k^{\text{ème}}$ épreuve $(0 < k \leq 4)$.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.