Lycée Secondaire Ali Zouaoui	**Devoir à la maison N° 03**	Classe : $3^{ème}$ Maths

<u>*EXERCICE N° 01*</u> (3 pts) :

Dans une classe de $3^{ème}$ on a observé les deux caractères :

X : note obtenu en mathématiques.

Y : note obtenu en physiques.

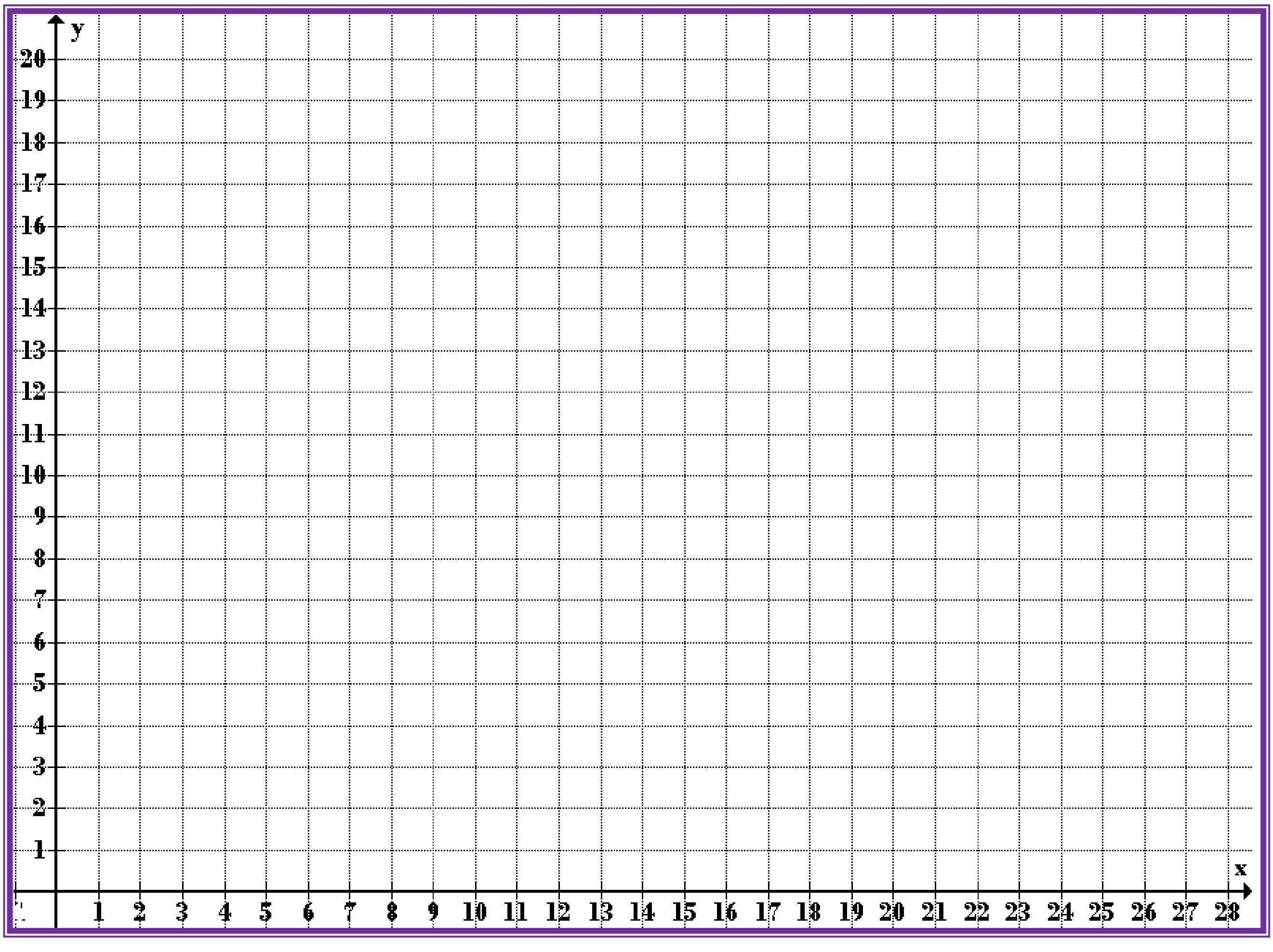
On a obtenu le tableau suivant :

X \ Y	$[0,4[$	$[4,8[$	$[8,12[$	$[12,16[$	$[16,20[$
$[0,4[$	1				
$[4,8[$	1	3	2		
$[8,12[$		2	5	1	1
$[12,16[$			2	4	2
$[16,20[$			1	3	2

1- Déterminer les distributions marginales de X et de Y .

2- Représenter graphiquement la série statistique (X,Y) par un nuage de points.

3- Placer sur la figure le point moyen G du nuage.



EXERCICE N° 02 (5 pts) :

Une boite contient 6 jetons indiscernables au toucher et répartis comme suit :

* 2 jetons blancs marqués : $(-1)\,;0$

* 4 jetons noirs marqués : $(-1)\,;(-1)\,;1\,;0$

I- On tire simultanément et au hasard 3 jetons de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir un seul jetons blanc ».

B : « Obtenir un seul jeton marqué (-1)».

C : « Obtenir un seul jetons blanc ou un seul jeton marqué (-1)».

II- On effectue maintenant quatre tirages successifs d'un jeton avec remise.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

D : « Obtenir une seule fois un jeton blanc ».

E : « Obtenir un jeton blanc uniquement au quatrième tirage ».

III- Soit n un entier naturel non nul. On effectue n tirages successifs d'un jeton avec remise.

Soit F_n l'événement : « Obtenir au cours de ces n tirages un jeton blanc uniquement au dernier tirage ».

On désigne par p_n la probabilité de l'événement F_n.

1- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

2- Soit $S_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE N° 03 (4 pts) :

1- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\begin{cases} v_1 = -2 \\ v_{n+1} = \sqrt{2+v_n} \end{cases} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculer v_2, v_3 et v_4.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = 2 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

2- Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $w_n = 2^{n-1}\sqrt{2-v_n}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $w_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

b) En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

EXERCICE N° 04 (4 pts) :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=2\cos^2(x)-\sqrt{3}\sin(2x)-1$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

2- a) Montrer que $(\Delta): x=\frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

b) Montrer que l'étude de f peut être réduite à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

3- Etudier f et tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]$(on précisera les points d'intersection de $(\mathscr{C}')$ avec l'axe des abscisses).

4- Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ par $g(x)=2\cos\left(2|x|+\frac{\pi}{3}\right)$.

a) Utiliser $(\mathscr{C}')$ pour tracer la courbe (Γ) de g (on précisera les demi tangentes au point d'abscisse 0)

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x)\geq 1$.

EXERCICE N° 05 (4 pts) :

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(0,4,-1)$; $B(-2,4,-5)$; $C(1,1,-5)$ et $D(1,0,-4)$.

1- Donner une équation de chacun des plans médiateurs de $[AB]$; $[BC]$ et $[AD]$.

2- a) Montrer que ces trois plans ont un point commun Ω.

b) En déduire que Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

3- Déterminer l'équation paramétrique de la droite (Δ) axe du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC.

4- Soit (Γ) la sphère contenant le cercle $(\mathscr{C})$ et dont le centre I appartient au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Donner une équation de (Γ).

b) Ecrire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ tangent à (Γ) en A.

Bon Travail ....

Correction du devoir

EXERCICE N° 01

1-

$X \backslash Y$	**2**	**6**	**10**	**14**	**18**	Distribution marginale de X
2	1					1
6	1	3	2			6
10		2	5	1	1	9
14			2	4	2	8
18			1	3	2	6
Distribution marginale de Y	2	5	10	8	5	30

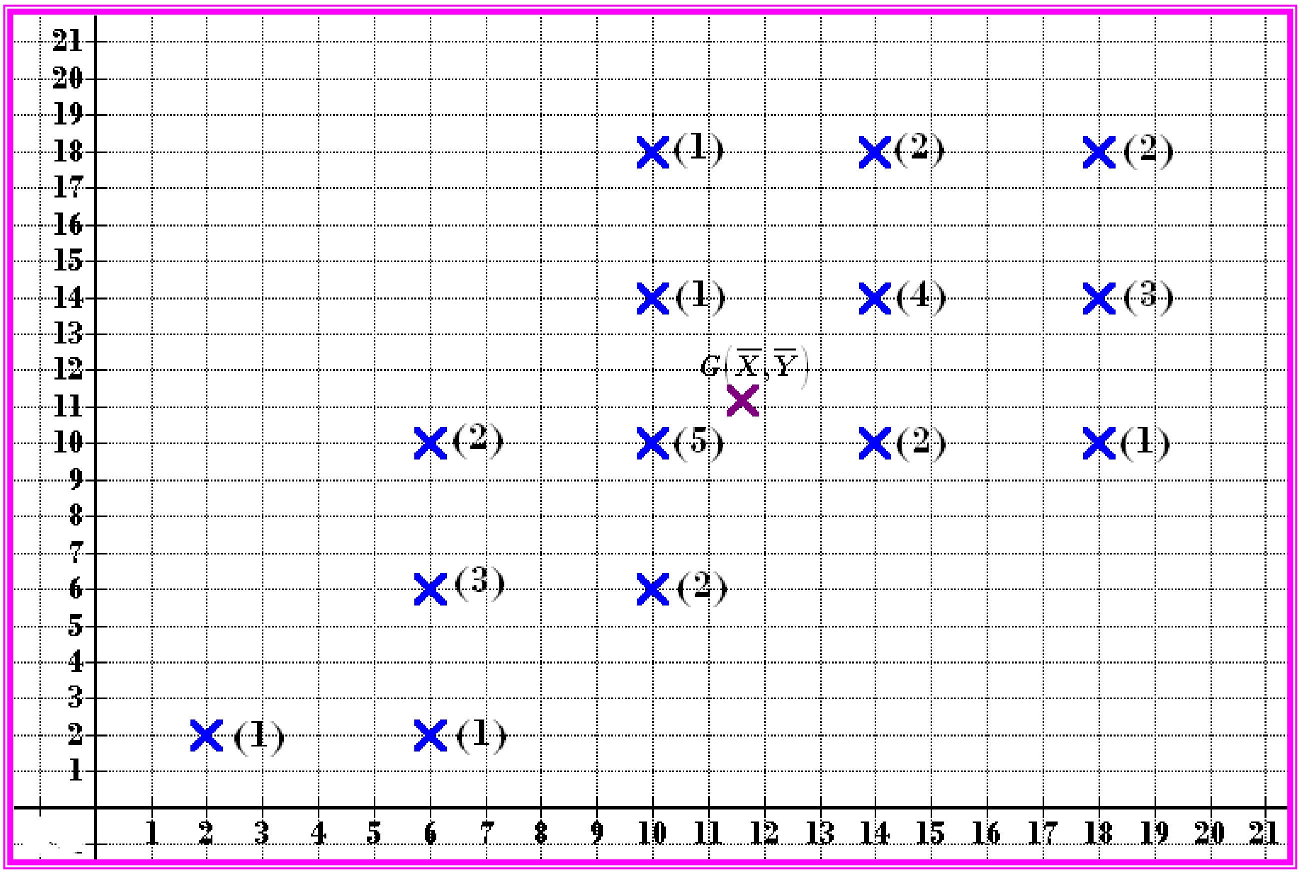
2,6,10,14 et **18** sont les centres des classes de X et Y .

2- $\overline{X} = \dfrac{1\times2+6\times6+10\times9+14\times8+18\times6}{30} = 11,6$

$\overline{Y} = \dfrac{2\times2+6\times5+10\times10+14\times8+18\times5}{30} = 11,2$

Donc $G(11,6;11,2)$

3-



EXERCICE N° 02

I- L'univers Ω associé à cette épreuve est l'ensemble des combinaisons de 3 jetons parmi 6 donc $card(\Omega)=C_6^3=20$

$$P(A)=\frac{C_2^1C_4^2}{20}=\frac{3}{5} \quad ; \quad P(B)=\frac{C_3^1C_3^2}{20}=\frac{9}{20} \quad ; \quad P(C)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{5}$$

II- $P(D)=\dfrac{C_4^1\,2^1\times 4^3}{6^4}=\cdots \quad ; \qquad P(E)=\dfrac{2^1\times 4^3}{6^4}=\cdots$

III- 1- $p_n=\dfrac{2^1\times 4^{n-1}}{6^n}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

2- a) $S_n=p_1+p_2+\cdots+p_n=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}}=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]=1$

EXERCICE N° 03

1- a) $v_2=\sqrt{2+v_1}=0 \quad ; \quad v_3=\sqrt{2+v_2}=\sqrt{2} \quad ; \quad v_4=\sqrt{2+v_3}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$

b) Pour $n=1$ on a : $v_1=-2$ et $2-4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$

On suppose que $v_n=2-4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$ montrons que $v_{n+1}=2-4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right);\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$v_{n+1}=\sqrt{2+v_n}=\cdots=2\left|\cos(\frac{\pi}{2^n})\right|=2\cos(\frac{\pi}{2^n}) \text{ car } \frac{\pi}{2^n}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=2\cos(2\times\frac{\pi}{2^{n+1}})=2-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

donc $v_n=2-4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

2- a) Par récurrence.

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{w_3}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

EXERCICE N° 04

1-

$$f(x)=2\cos^2(x)-\sqrt{3}\sin(2x)-1=\underbrace{2\cos^2(x)-1}_{\cos(2x)}-\sqrt{3}\sin(2x)=2\left(\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x)\right)$$

$$=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

2- a) On a : $\forall x\in\mathbb{R}$, on a : $\left(2\times\frac{\pi}{3}-x\right)\in\mathbb{R}$ et on a:

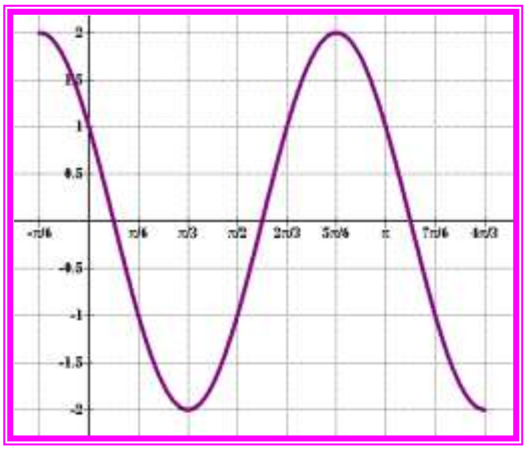
$f\left(2\times\frac{\pi}{3}-x\right)=2\cos\left[2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\cdots=f(x)$ donc $(\Delta):x=\frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

b) On a : f est π-périodique donc il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur π d'autre part $(\Delta):x=\frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$ donc on choisit d'intervalle d'étude de façon que $\frac{\pi}{3}$ soit son centre d'où le domaine d'étude de f peut être réduite à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

3- f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………



4- a) Pour tout $x\in\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ on a : $(-x)\in\left[-\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ et $g(-x)=g(x)$ donc g est paire .

$(\Gamma)=(\xi_1)\cup S_{(o,\vec{j})}(\xi_1)$ avec (ξ_1) est la courbe de restriction de f à l'intervalle $\left[0,\frac{4\pi}{3}\right]$.

b) $S=\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$

EXERCICE N° 05

1- Soient P_1, P_2 et P_3 les plans médiateurs de $[AB]; [BC]$ et $[AD]$

Equation cartésienne de P_1.

Soit $I = A * B$, $M(x, y, z) \in P_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow x + 2z + 7 = 0$

De même $P_2 : x - y + 3 = 0$ et $P_3 : x - 4y - 3z = 0$

2- a) $\Omega(x, y, z) \in P_1 \cap P_2 \cap P_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z + 7 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \\ x - 4y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$

b) $\Omega \in P_1 \cap P_2 \cap P_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \Omega B = \Omega C \\ \Omega A = \Omega D \end{cases} \Leftrightarrow \Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ donc Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

3- $M \in (\Delta) \Leftrightarrow MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in P_1 \cap P_2$

$M(x, y, z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ z = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \end{cases}$ donc $(\Delta) : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 3 + \alpha \\ z = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\alpha \end{cases} \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$

4- a) $I(x, y, z) \in (\Delta) \cap (O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \cdots\cdots \Leftrightarrow I(-7, -4, 0)$

Donc $(\Gamma) : (x + 7)^2 + (y + 4)^2 + z^2 = IA^2 = 114$

b) $\mathscr{P} :\ 7x + 8y - z - 33 = 0$

EXERCICE N° 03 (7 pts) :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5\,u_n - 6 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$.

1-a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

b) Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n .

2- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+2} \equiv u_n [4]$

b) En déduire que pour tout entier naturel k , on a : $u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3- a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2u_n \equiv 28[100]$.

4- Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n .

5- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} \wedge u_n = 2$.