Série d'exercices *** $3^{ème}$ M Probabilités	Lycée Secondaire Ali Zouaoui " Hajeb Laayoun "

I / Langage ensembliste-Langage probabiliste :

Définitions : * Lorsqu'on fait une expérience aléatoire , le résultat est appelé issue .
* L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles.
* Un évènement est une partie de l'univers des possibles .

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience , on a :

$\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties ou évènements de Ω.

Langage ensembliste	Langage probabiliste
A : une partie de Ω	A est un évènement
$A = \Omega$	A est l'évènement certain
$A = \varnothing$	A est l'évènement impossible
e : un élément de Ω , $e \in \Omega$	e est une éventualité ou un cas possible
$\{e\}$ est un singleton , $\{e\} \subset \Omega$	$\{e\}$ est un évènement élémentaire
$A \cup B$ est la réunion de A et B	$A \cup B$ est l'évènement « A ou B »
$A \cap B$ est l'intersection de A et B	$A \cap B$ est l'évènement « A et B »
$\overline{A} = C_\Omega^A$ est le complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$ est l'évènement contraire de A
Si $A \cap B = \varnothing$, A et B sont deux parties disjoints de Ω	A et B sont deux évènements incompatibles

II / Probabilité d'un évènement :

Définition : Soit Ω un ensemble fini , on appelle probabilité définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ toute application $p : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ tels que :

* $p(\Omega) = 1$
* Pour tout A et B de $P(\Omega)$, si $A \cap B = \varnothing$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
* On dit que p est une **équiprobabilité** sur $\mathscr{P}(\Omega)$ ou **probabilité uniforme** si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité .
* Soit Ω un ensemble fini p l'équiprobabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$ pour tout évènement A de $\mathscr{P}(\Omega)$, la probabilité de A est :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}.$$

Notation : Le cardinal d'un ensemble A noté $card(A)$ est le nombre d'éléments de A .

III / Propriétés :

Soit Ω un ensemble fini , p l' équiprobabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$:

❶ Pour tout évènement A de $P(\Omega)$ on a : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

❷ $p(\varnothing) = 0$.

❸ Pour tout A et B de $\mathscr{P}(\Omega)$ on a :
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$.
- $Si \quad A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$.

Exercice N°01 :

Une urne contient 4 boules rouges , 5 boules vertes et 3 boules blanches indiscernable au toucher .

1) On tire simultanément 2 boules de l'urne , calculer la probabilité des évènements suivants :
   a) A : « avoir 2 boules blanches » .
   b) B : « avoir deux couleurs » .
   c) C : « avoir au moins une boule verte » .

2) On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne , calculer la probabilité des évènements suivants :
a) D : « avoir deux boules de même couleur » .
b) E : « avoir une seule boule verte » .

3) On inscrit le numéro (1) sur les boules rouges , (-1) sur les boules vertes et (0) sur les boules blanches
On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne ; On pose S : « la somme des numéros inscrits sur les boules tirées ».
a) Donner les valeurs possibles de S .
b) Calculer la probabilité de chaque valeur de S .
c) Vérifier que la somme de toutes ces probabilités est égale à 1 .

Exercice N°02 :

Une urne contient 10 boules indiscernables au touchées : six noire numérotées $1,1,2,2,2,3$ et quatre blanches numérotées $1,1,2,3$

1) On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :
a) A : « obtenir trois boules noires » .
b) B : « la somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est paire » .
c) C : « obtenir trois boules noires ou une somme paire » .

2) On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne .Calculer la probabilité des évènements suivants :
a) D : « avoir exactement deux boules noires et une boule blanche » .
b) F : « avoir au moins une boule noire » .
c) E : « la boule n°2 est tirée pour la première fois au deuxième tirage ».

Exercice N°03 :

Une urne contient quatre boules blanches numérotées : $-1,0,0,1$ et cinq boules noires numérotées : $-1,1,1,2,2$.

1) On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :
a) A : « obtenir trois boules de deux couleurs » .
b) B : « obtenir trois boules dont le produit des numéros est nul ».
c) C : « obtenir trois boules dont le produit est une puissance de 2 ».
d) D : « $A \cup B$» .
e) E : « il reste dans l'urne le même nombre de boules blanches que de boules noires »

2) On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :
a) F : « obtenir exactement deux boules blanches » .
b) G : « obtenir une somme nulle » .

3) On répartit les neuf boules dans neuf cases ,chaque case pouvant contenir de zéro jusqu'à neuf boules .
a) Calculer le nombre de répartition possible .
b) Calculer la probabilité des évènements suivants :

- H : « deux cases et deux seulement sont non vide » .
- K : « aucune case n'est vide ».
- L : « chaque couleur est dans une case ».

Exercice N°04 :

On considère une urne dans laquelle se trouve : 1 boule portant le numéro 1 , 2 boules portant le numéro 2 , 3 boules portant le numéro 3 et n boules portant le numéro n .

1) Combien l'urne contient elle de boule ?

2) On tire au hasard une boule de l'urne , tous les tirages sont supposés équiprobables.

a) On suppose que n est pair .Exprimer en fonction de n la probabilité pour que la boule tirée porte :

- Un numéro pair .
- Un numéro impair .

b) Dans cette question , on suppose seulement que le nombre totale de boules dans l'urne est 21. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à 4 ?

Exercice N°05 :

Une urne contient 6 boules : 3 numérotées 1 , 2 numérotées 2 et une numérotées 3. On tire une première boule au hasard puis sans remettre cette boule on tire une seconde boule au hasard .

Le résultat d'un tel tirage est le couple (a,b) où a et b sont les nombres inscrits sur la première et la seconde boule .

1) Calculer la probabilité de chaque résultat possible .

2) Calculer la probabilité des évènements suivants :

- A : « les deux numéros tirés sont égaux $(a=b)$ ».
- B : « le premier nombre tiré est strictement supérieur au second $(a>b)$ » .
- C : « le premier nombre tiré est inférieur au second $(a\leq b)$» .

3) On note X la valeur absolue de la différence de deux nombres tirés $(X=|a-b|)$.

a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X .

b) Pour tout élément i de E , calculer la probabilité de l'évènement $(X=i)$.

Exercice N°06 :

Soit $(\Omega,P(\Omega),p)$ un espace probabilisé finie.

1) Montrer que si A , B *et* C sont trois évènements quelconques de $P(\Omega)$, on a :

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$

2) a) Soient $A_{1\leq i\leq n}$ n évènements quelconques de $P(\Omega)$. Montrer l'inégalité suivante :

$$p(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)\leq\sum_{i=1}^{n}p(A_i) \quad ❶$$

b) Dans quel cas l'inégalité ❶ devient-elle une égalité ?

Série d'exercices *** $3^{ème}$ M Fonctions trigonométriques	Lycée Secondaire Ali Zouaoui " Hajeb Laayoun "

Fonction :

Fonctions	Ensemble de définition , continuité et dérivabilité	Période	*Fonctions dérivées*
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	2π	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	2π	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \sin(ax+b)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$2\pi/\lvert a\rvert$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$
$x \mapsto \cos(ax+b)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$2\pi/\lvert a\rvert$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$

Limite :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a\,;(a\in\mathbb{R}) \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0 \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Domaine d'étude :

Si une fonction f est périodique de période T alors D_E le domaine d'étude est $D_E=\left[a\,,a+T\right]\cap D_f$.

- Comment représenter $g : x \mapsto f(x)+b\,;b\in\mathbb{R}$?

$M(x,f(x))\in(\xi_f)\,;M'(x,f(x)+b)\in(\xi_g)$ donc $\overrightarrow{MM'}=b\,\vec{j}$ et par suite $\underline{(\xi_g)=t_{b\vec{j}}(\xi_f)}$

- Comment représenter $g : x \mapsto f(x-a)\,;a\in\mathbb{R}$? ; $\underline{(\xi_g)=t_{a\vec{i}}(\xi_f)}$

Point méthode :

$\lim_{x\to a} f(x)="\frac{0}{0}"$	❶Simplification ❷ Se ramener au théorème sur les limites ❸Utiliser le nombre dérivé ❹Changement de variable $h=x-a$
Signe d'une somme de termes hybride $\left[exemple : x+\sin(x)\,;-x+\cos(x)\,;\cdots\right]$	Dresser le tableau de variation de f tel que $f(x)$ est l'expression dont on veut déterminer le signe
Déterminer un minimum ou un maximum de f	Etudier le signe de $f'(x)$

Exercice N°01 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{5x}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-\sin(x)}{x}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{1-\cos(x)}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}\ ;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}\ ;\ \lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x+\frac{\pi}{4}}$$

Exercice N°02 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-1} & si\ \ x\neq 1\\ 0 & si\ x=1\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1 .

2) f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice N°03 :

Soit $f(x)=\dfrac{\sin(x)+|\sin x|}{2}$

1) Montrer que la droite $\Delta : x=\dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (ξ_f).

2) Montrer que f est périodique de période 2π .

3) Etudier f et tracer la courbe représentative (ξ_f) de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice N°04 :

Soit $f(x)=\sin^2(x)-\sin(x)+2$

1) Etudier la fonction f .

2) Tracer (ξ_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Soit $g(x)=\cos^2(x)-\cos(x)+2$; En utilisant (ξ_f), tracer (ξ_g) (expliquer) .

Exercice N°05 :

Soit $f(x)=\sin(2x)$

1)Etudier les variations de f sur un intervalle convenablement choisie .

2) Tracer la courbe représentative (ξ_f) de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ .Expliquer comment tracer la courbe (ξ_g) de g en utilisant (ξ_f) ?

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=2-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Tracer la courbe représentative (ξ_h) de h en utilisant (ξ_g).

Exercice N°06 :

On donne la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=a\sin(2x)+b(1-\cos 2x)\,;(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer a *et* b sachant que f admet un extremum au point $x_0=\dfrac{\pi}{6}$ *et* $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-3$.

2) Montrer alors que $f(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1$ pour tout $x\in[0,\pi]$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.

b) Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $[0,\pi]$.

4) Soit $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}\quad;\quad x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{3}\sin(2x)-2\sin^2(x)}$.

Montrer que pour tout $x\in D_g$ *on a* : $g(x)=\dfrac{\sin(x)}{f(x)}$ et en déduire D_g.