Série d'exercices * $3^{ème}$ M** **Dénombrement**	**Lycée Secondaire Ali Zouaoui** **" Hajeb Laayoun "**

I / p-uplet :

Définition : Soit E un ensemble non vide et $p \in \mathbb{N}^*$;On appelle **p-uplet** d'élément de E toute écriture de la forme :

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p)$ où $a_i \in E$ pour tout $1 \le i \le p$.

- Un **p-uplet** d'éléments de E est une liste ordonnée de p éléments de E , deux à deux distincts ou non .
- Lorsque p = 2 , un 2-uplet est un couple .
- Lorsque p = 3 , un 3-uplet est un triplet .

II / Arrangement :

Définition : E est un ensemble tel que card(E) = n et $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \le p \le n$.

- Un **arrangement** de p éléments d'un ensemble E est un p-uplet d'éléments deux à deux distincts de E .
- Un **arrangement** de p éléments d'un ensemble de n éléments est dit : arrangement de n éléments p à p.

Nombre d'arrangement :

Théorème : Le nombre d'arrangement de p éléments d'un ensemble à n éléments est : $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

III / Permutations :

Définition : Soit E un ensemble tel que card (E) = n . On appelle **Permutation** de E tout arrangement de n éléments de E

Théorème : Le nombre de permutations de n éléments est :

$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$

IV / Combinaisons :

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 \le p \le n$; On appelle **Combinaison** de p éléments d'un ensemble E à n éléments toute partie à p éléments de E .

Nombre de combinaison :

Théorème : Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)! \times p!}$.

Propriétés de C_n^p :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
- Pour tous entiers naturels n *et* p tels que $0 \le p \le n$ on a : $C_n^{n-p} = C_n^p$
- Pour tous entiers naturels n *et* p tels que $1 \le p \le n-1$ on a : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

b-mehdi.jimdo.com

V / Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini :

Théorème : Le Nombre d'applications d'un ensemble à p éléments $\left(p\in\mathbb{N}^*\right)$ dans un ensemble à n éléments $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ est n^p .

VI / Formule de binôme de Newton :

Soient a et b deux réels et n un entier naturel non nul , on a : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$.

VII / Tableau récapitulatif :

Soient p et n deux entiers naturels .On tire p éléments d'un ensemble à n éléments :

Nature du tirage	Tirage simultanément	Tirage successivement avec remise	Tirage successivement sans remise
Un tirage possible	Une combinaison	Une application	Un arrangement
L'ordre	N'intervient pas	Intervient	Intervient
Nombre de tirage possible	$C_n^p \quad ; \quad 0\le p\le n$	n^p	$A_n^p \quad ; \quad 0\le p\le n$

VIII / Point Méthode :

Voici des dénombrements qu'il est impératif de savoir effectuer :

☙ Tirage de p boules dans une urne contenant n boules :

- Tirage ordonnés (successif) avec remise n^p .
- Tirage ordonnés sans remise $(p\le n)$: $A_n^p=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)$

Noter que le principe multiplicatif fournit le résultat dans les deux cas : le recours aux formules n'est pas une obligation .

- Tirage non ordonnés (ou simultanés) sans remise : C_n^p.

Ces tirages sont identiques aux parties à p éléments de l'urne.

☙ Echantillons de taille et composition données :

Schéma : Une urne contient a boules rouges et b boules noires .Le nombre d'échantillons comportant p boules rouges $(p\le a)$ et q boules noires $(q\le b)$ est $C_a^p\times C_b^q$.

Et voici deux conseils :

❶ Le recours aux tirages dans une urne n'est qu'un modèle : il n'est ni obligatoire, ni incontournable (toutes les situations ne s'y ramènent pas)

❷ Lorsqu'un ensemble à dénombrer est défini à l'aide de la locution **au moins** ,il est bien souvent plus simple de dénombrer son **complémentaire**.

☙✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪✪❧

Exercice N° 01 :

1/ Une urne contient 12 boules : 5 boules noires , 3 boules blanches et 4 boules rouges

On tire simultanément 5 boules .

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b) Combien y a-t-il de tirages possibles comportant 2 boules noires et 3 boules blanches ?

c) Combien y a-t-il de tirages possibles comportant 1 boule noire ,2 boules blanches et 2 boules rouges ?

2/ Même questions lorsque les 5 boules sont tirées successivement avec remise.

3/ Même questions lorsque les 5 boules sont tirées successivement sans remise.

b-mehdi.jimdo.com

Exercice N° 02 :

Une urne contient 10 jetons : 5 rouges ayant les numéros : 1 - 2 - 3 - 4 – 5.
3 blancs ayant les numéros : 6 – 7 – 8 .
2 jaunes ayant les numéros : 0 – 9 .

1/ On tire simultanément 3 jetons de l'urne , combien de tirage peut – on former dans chacun des cas suivants :

a) Tirage quelconques .
b) Avoir au moins un jetons portant un numéro pair .
c) Avoir 3 jetons de même couleur .
d) Avoir la somme des numéros marqués est paire .

2/ On tire successivement et avec remise 3 jetons .

a) Quel est le nombre de tirage possible ?
b) Quel est le nombre de tirage sachant que les jetons sont :

- Tous rouges .
- Tous portants un numéro paire .
- Tous portants des numéros impairs .

c) Quel est le nombre de tirage sachant qu'il y ait au moins un jetons rouge .

3/ Même questions que 2/ lorsque les trois jetons sont tirées successivement.

Exercice N° 03 :

Un sac contient 15 boules dont 6 rouges et 4 vertes et 5 blanches .

1/ Un joueur tire simultanément 4 boules du sac .
De combien de façons peut-on :

a) Tirer exactement une boule rouge ?
b) Tirer au moins une boule verte ?
c) Tirer 4 boules de même couleur ?

2/ Un joueur tire successivement et sans remise 4 boules .
De combien de façons peut-on :

a) Avoir la première boule tirée rouge ?
b) Tirer au moins une boule verte ?
c) Tirer une seule boule rouge ?

Exercice N° 04 :

Un sac contient : * 5 boules rouges numérotées 0 , 0 , 1 , 2 , 2 .
* 3 boules blanches numérotées 0 , 1 , 2 .
* 2 boules jaunes numérotées 0 , 4 .

1/ On tire simultanément 3 boules du sac .
Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :

a) Obtenir 3 boules de même couleur .
b) Obtenir une seule boule jaune .
c) La somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est égale à 5 .
d) Le produit des trois numéros inscrits sur les boules tirées est nul .
e) Obtenir une seule boule rouge et une seul boule portant le numéro 0 .

2/ On tire successivement et sans remise 4 boule du sac :

b-mehdi.jimdo.com

Saleh - A

Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :

a) Obtenir 2 boules blanches .

b) Obtenir au moins une boule jaune .

c) La somme des quatre numéros inscrits sur les boules tirées est égale à 3 .

d) La première boule tirée est rouge et la deuxième porte le numéro 0 .

3/ On répartit les 10 boules dans trois urnes u_1 ; u_2 *et* u_3 .

De combien de manières peut – on les placers dans chacun des cas suivants :

a) Les boules de même couleurs sont placées dans une seule urne .

b) Une seule urne est vide .

c) Aucune urne ne reste vide .

Exercice N° 05 :

Un mot de 3 lettres est tout assemblage ordonné de trois lettres de l'alphabet, une même lettre pouvant être utilisée plusieurs fois (un mot n'a donc pas nécessairement de sens) , En utilisant les lettres du mot « FALEH » .

1/ Combien peut-on écrire de mots de trois lettres ?

2/ Combien peut-on écrire de mots de trois lettres distincts ?

3/ Combien peut-on écrire de mots de trois lettres distincts dont la deuxième lettre est la lettre H.

Exercice N° 06 :

On lance un dé parfait (non truqué) numéroté de 1 à 6 , deux fois de suite .Chaque résultat est un couple (a , b) où a est le numéro inscrit sur la face supérieur du dé au 1^{er} lancer et b celui du $2^{ème}$ lancer .

1/ A l'aide d'un tableau donner tous les couples (a , b) possibles .

Quel est le nombre de réalisations possibles ?

2/ Combien y a-t-il de réalisations où les deux lancers ont donné :

a) Le même numéro ?

b) Le résultat du premier lancer est strictement supérieur au résultat du second ?

c) La somme des points marqués est égale à 6 ?

d) La somme des points marqués est impaire ?

Exercice N° 07 :

1/ Combien y a-t-il de nombres entiers écrits avec trois chiffres distincts pris dans l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?

2/ En utilisant les chiffres de l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, combien y a-t-il de nombres entiers écrits avec trois chiffres dans lesquels un chiffre est répété deux fois ?

3/ En utilisant les chiffres de l'ensemble $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, combien y a-t-il de nombres entiers écrits avec quatre chiffres qui contiennent au moins un des chiffres 5 et 7 ?

Exercice N° 08 :

1/ Combien de nombres entiers de 8 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 ?.

b-mehdi.jimdo.com

Faleh - A

2/ Combien y a-t-il de ces nombres où les chiffres 5 ,6 ,7 sont toujours ensemble dans cet ordre ?

3/ Combien y a-t-il de ces nombres où les chiffres 5 ,6 ,7 sont toujours ensemble dans un ordre quelconque ?

Exercice N° 09 :

Anagramme : Lorsqu'on permute les lettres d'un mot , on obtient une anagramme de ce mot .

1/ Dénombrer les anagrammes du mot « crayons » .

2/ Dénombrer les anagrammes du mot « crayons » :

a) Commençant et finissant par une consonne .
b) Commençant et finissant par une voyelle .
c) Commençant par une voyelle et finissant par une consonne .
d) Commençant par une consonne et finissant par une voyelle.
e) Que remarquez vous en sommant les réponses a) , b) , c) et d) ?

3/ Dénombrer les anagrammes du mot « dictée » :

a) En tenant compte de l'accent.
b) En ne tenant pas compte de l'accent sur le « é » c'est-à-dire en ne différenciant pas « e » et « é » .

4/ Dénombrer les anagrammes du mot « élève » :

a) En tenant compte des accents .
b) En supprimant les accents .

5/ Dénombrer les anagrammes du mot « disposition » .

Exercice N° 10 :

1/a) Montrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \le p \le n-1$ on a :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} .$$

b) En déduire que : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-3}^{p-1} + \cdots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}$.

2/ Calculer $S(n,p) = 1\times 2\times\cdots\times(p-1) + 2\times 3\times 4\times\cdots\times p + (n-p+1)\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)$.

Exercice N° 11 :

1/ a) Montrer que pour tous entiers naturels q et k tels que $q \le k$ on a :

$$C_n^{n-q} \times C_{n-q}^{n-k} = C_n^k \times C_k^q .$$

b) Calculer $(1-1)^k$ de deux façons .

2/ En déduire que : $C_n^n \times C_n^{n-k} - C_n^{n-1} \times C_{n-1}^{n-k} + \cdots + (-1)^k C_n^{n-k} \times C_{n-k}^{n-k} = 0$

b-mehdi.jimdo.com