ATSM

Association Tunisienne des Sciences Mathématiques

Forum du bac Math

Sousse : 22-23 Mars 2010

Thème : Géométrie dans l'espace

Exercice 1:

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1. Soit A et B deux points distincts, alors l'ensemble des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)=0$ est :

   a) une droite **b)** une sphère **c)** un plan.

2. Soit A et B deux points distincts alors l'ensemble des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que : $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ est :

   a) une droite **b)** une sphère **c)** un plan.

3. Le projeté orthogonal du point B(1 ; 6 ; 0) sur le plan P d'équation : $-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :

   a) $(-1;-2;0)$ **b)** $(0;0;5)$ **c)** $(3;0;2)$.

4. Soit $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $M(x,y,z)$ alors $d^2\left(M,(AB)\right)$ est égale à :

   a) $(x-y-1)^2+2z^2$ **b)** $\dfrac{(x+y-1)^2+2z^2}{2}$ **c)** $\dfrac{(x+y-1)^2+2z^2}{4}$

5. Dans l'espace $\mathscr{E}$, muni d'un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points $A(1,2,2)$ et $B(2,4,3)$ et la droite $D=(AB)$.

   a) il existe un plan contenant D et l'axe Ox. **b)** il existe un plan contenant D et l'axe Oy.
   c) il existe un plan contenant D et l'axe Oz.

6. Soit A, B et C trios points non alignés d'un plan $\mathscr{P}$ de l'espace $\mathscr{E}$ alors l'ensemble Γ des points M du plan $\mathscr{P}$ tels que $\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\|=AB\times MC$ est une

   a. parabole de $\mathscr{P}$ **b.** sphère **c.** droite

Exercice 2:

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$. On considère le tétraèdre $ABCE$ tel que $A(1,0,2)$, $B(0,0,1)$, $C(0,-1,3)$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

1. (a) Déterminer les coordonnées du point E.
   (b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCE$.
2. (a) Soit P le plan d'équation $x-2y-z+5=0$. Montrer que P est parallèle au plan (ABC).
   (b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan P.
3. Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.
   (a) Déterminer le rapport de h.
   (b) Le plan P coupe les arêtes $[EA]$ et $[EB]$ en I et J. Calculer le volume du tétraèdre $EIJK$.

Exercice 3:

On considère l'espace muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
On considère les points $A(3, 1, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(3, 2, 1)$ et $D(0, 0, d)$ où d désigne un réel positif ou nul. On a ainsi un tétraèdre $ABCD$.

1. (a) On pose $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{N}$
   (b) En déduire l'aire du triangle ABC.
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$.
2. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan P.
   (a) On pose $\overrightarrow{DH} = \lambda \vec{N}$. Calculer λ en fonction de d.
   (b) En déduire l'expression de la distance DH. Montrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $\mathscr{V}_d = \dfrac{2d+5}{6}$.
3. (a) Déterminer pour quelle valeur de d la droite (DB) est perpendiculaire au plan P.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S_d) de centre D et passant par B.
   (c) Donner suivant les valeurs de d, l'intersection $(S_d) \cap P$.

Exercice 4:

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, et α est un paramètre de l'intervalle $]0, \pi[$, on note (S_α) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM}^2 - 2\cos(\alpha)\left[\overrightarrow{OM}.\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)\right] + 3 - 4\sin^2(\alpha) = 0.$$

1. (a) Donner une équation cartésienne de (S_α).
   (b) Montrer que (S_α) est une sphère, on note I_α son centre et R_α son rayon. Prouver que I_α appartient à une droite fixe Δ.
2. (a) Déterminer les sphères (S_α) passant par l'origine du repère.
   (b) Montrer que O est le milieu de $[I_{\pi-\alpha} I_\alpha]$.
   (c) En déduire que (S_α) et $(S_{\pi-\alpha})$ sont symétriques par rapport à O.
3. Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de I_α sur P.
   (b) Préciser l'intersection de P et (S_α).

Exercice 5:

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On donne les points $A(2, 2, -1)$, $\Omega(1, 0, 1)$ et P le plan d'équation : $2x + y + 2z - 13 = 0$.

1. (a) Donner une équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3.
   (b) Déterminer l'intersection (S) et P.
2. Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire au plan P.
   (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (D).
   (b) Étudier la position relative de (D) et (S)
3. Soit m un réel donné et (S_m), l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2mz + 2m^2 - 3 = 0.$$

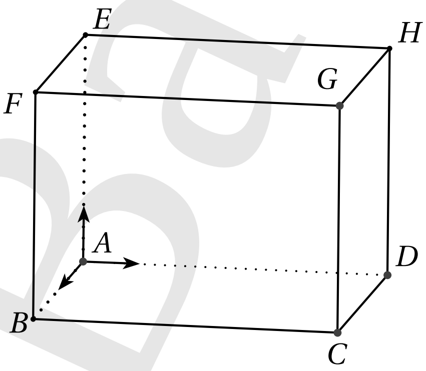
(a) Montrer que (S_m) est une sphère. On notera I_m le centre de (S_m).

(b) Montrer que I_m décrit une droite fixe que l'on précisera.

(c) Étudier la position relative de (S_m) et le plan P.

Exercice 6:

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $ABCDEFGH$ est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$.



1. (a) Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

   (b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.

   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2. Soit α un réel différent de 1 et M le point des coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.

   (a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.

   (b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3. Soit $\mathscr{V}$ le volume du tétraèdre $MEBG$.

   (a) Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de α.

   (b) Calculer le volume du tétraèdre $AEBG$.

   (c) Pour quelles valeurs de α $\mathscr{V}$ est-il égal au volume du parallélépipède $ABCDEFGH$?

Exercice 7:

L'epace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On donne les points $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)$ et $D(0,1,-1)$.

On note (S) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

1. (a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$.

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (OCD).

2. Montrer que (S) est une sphère donner les cordonnées du point I centre de (S) et le rayon de (S).

3. (a) Calculer la distance de I à P. En déduire la position de (S) et (OCD).

   (b) Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$. En déduire $(S) \cap (OCD)$.

Exercice 8:

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et m un paramètre réel dans $\mathbb{R} \setminus [-2, 0]$. On note (S_m) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my + m^2 - 2m = 0$.

1. (a) Montrer que S_m est une sphère donner le rayon R_m et les coordonnées de I_m centre de S_m.

   (b) Montrer que S_m et S_{-2-m} sont symétrique par rapport au point $\Omega(-1, -1, 0)$.

2. Soit P_m le plan d'équation $2x + 2y - m + 1 = 0$.

   (a) Etudier la position de S_1 et P_m pour $m \in \mathbb{R} \setminus [-2, 0]$

   (b) Montrer que si $m \neq 1$ on a $S_m \cap S_1 = P_m \cap S_1$.

   (c) Etudier suivant les valeurs de m l'intersection $S_m \cap S_1$.