ATSM

Association Tunisienne des Sciences Mathématiques

Forum du bac Math

Sousse : 22-23 Mars 2010

Thème : Isométries et similitudes

Exercice 1:

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes, sans donner une justification.

1. La composée de deux homothéties est toujours une homothétie

   ☐ vrai ☐ faux.

2. La composée de deux rotations peut être une translation

   ☐ vrai ☐ faux.

3. La seule droite globalement invariante par une symétrie glissante g est l'axe de g

   ☐ vrai ☐ faux.

4. Le rapport d'une similitude directe qui admet un seul point invariant est toujours différent de 1

   ☐ vrai ☐ faux.

5. une homothétie de rapport -2 est une similitude directe de rapport 2 et d'angle π

   ☐ vrai ☐ faux.

Exercice 2:

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1. Soit f est un déplacement, g antidéplacement tels que $f(A) = B$ et $g(B) = A$ avec $A \neq B$. Alors $g \circ f$ est une :

   a) symétrie glissante **b)** symétrie orthogonale **c)** translation .

2. Soit f l'application du plan complexe qui à $M(z)$ associe le point $M'(i\overline{z})$, alors f est une

   a. similitude indirecte de rapport 2 **b.** symétrie orthogonale d'axe $y = x$ **c.** symétrie orthogonale d'axe $y = -x$

3. Soit I un point du plan et la similitude $f = R_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)} \circ h_{(I,-3)}$. Alors la forme réduire de f est :

   a) $R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} \circ h_{(I,3)}$. **b)** $R_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)} \circ h_{(I,3)}$ **c)** $R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} \circ h_{(I,-3)}$.

4. Soit σ la similitude indirecte dont la forme complexe est : $z' = 2i\overline{z}$, alors une équation cartésienne de son axe est :

   a) $y = x + 1$. **b)** $y = -x$ **c)** $y = x$.

Exercice 3:

Soit IAB un triangle rectangle en I direct tel que $IA < IB$, on note J le symétrique de I par rapport à B.

1. Soit f la similitude directe telle que $f(A) = B$ et $f(I) = J$.

(a) Déterminer l'angle de f. Montrer que f admet un seul point invariant.

(b) Soit $O = S_{(AB)}(I)$, déterminer $f < (OA) >$ et $f < (OI) >$. En déduire le centre de f.

(c) Construire $f < (AB) >$, puis $f(B)$.

2. Soit g la similitude indirecte telle que $g(A) = B$ et $g(I) = O$.

   (a) Montrer que f et g ont le même rapport.

   (b) Caractériser alors $f^{-1} \circ g$.

   (c) En déduire que $g < (OA) >= (BJ)$ et $g < (BJ) >= (OA)$. Déterminer alors la forme réduite de g.

Exercice 4:

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$. On donne un carré $ABCD$ de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
S_1 est la similitude directe de centre C qui envoie D sur A.

1. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S_1.
2. On note B' l'image du point B par S_1.

   (a) Montrer que $S_1 \langle (DB) \rangle = (AB)$.

   (b) Montrer que la droite $\left(CB'\right)$ est tangente au cercle circonscrit au carré $ABCD$.

   (c) Construire alors le point B'.

3. S_2 est la similitude directe qui transforme O en A et A en B.

   (a) Déterminer et construire $B_1 = S_2(C)$.

   (b) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S_2.

   (c) En déduire que $S_2 \circ S_1$ est une homothétie dont on déterminera le rapport.

4. Soit E le milieu du segment $[DC]$, la droite (AE) coupe la droite (DB) en I. Montrer que les points C, I et B_1 sont alignés.

Exercice 5:

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de diamètre $[BC]$.
A le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$ et $I = S_{(BC)}(A)$

1. (a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f telle que $f(A) = C$ et $f(B) = O$.

   (b) Montrer que f est une rotation. Montrer que I est le centre de f.

   (c) Montrer que $f(O) = A'$.

2. Soit g l'antidéplacement tel que $g(A) = A'$ et $g(B) = C$.

   (a) Montrer que $g = S_O \circ S_{(AB)}$.

   (b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

3. Soit E le point tel que $OICE$ est un parallélogramme et $D = f(C)$. On pose $t = f \circ r_{(D,-\frac{\pi}{3})}$.

   (a) Déterminer $t(C)$ est caractériser t.

(b) Déterminer $t(E)$. En déduire la nature du triangle EBD

Exercice 6:

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O tel que $CB = 2CD$.

1. Soit f la similitude indirecte qui transforme D en C et C en B.
   (a) Montrer que f admet un seul point invariant Ω.
   (b) Montrer que $f \circ f$ est une homothétie.
   (c) En déduire que $\overrightarrow{D\Omega} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
2. Soit G le centre de gravité du triangle ACD.
   (a) Montrer que $D = \Omega * G$. Construire Ω.
   (b) Prouver que l'axe Δ de f est la médiatrice de $[GC]$.
3. On suppose dans cette question $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et on désigne par g la similitude directe qui transforme D en C et C en B.
   (a) Montrer que $g = S_{(BC)} \circ f$.
   (b) Montrer que le centre de g est le projeté orthogonal de C sur la droite (BD).

Exercice 7:

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne les points A et B d'affixes respectives -1 et i. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$ tel que $z' = (1+i)z + i$.

1. (a) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Soit M un point distinct de A. Montrer que AMM' est rectangle isocèle en M.
2. On pose $M_0 = O$ et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe de M_n.
   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n = (1+i)^n - 1$.
   (b) Montrer l'équivalence O, A, M_n sont alignés $\Longleftrightarrow$ n est un multiple de 4.

Exercice 8:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit f la similitude indirecte qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que
$z' = -2i\overline{z} + 2i + 1$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

1. Déterminer le rapport de f.
2. (a) Montrer que f admet un seul point invariant, on le note I. Calculer son affixe.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$. En déduire une équation de l'axe de f.
3. On pose M_0 le point d'affixe 2 et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe de M_n.
   (a) Caractériser $f \circ f$.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_{2n} = 4^n + 1$ et $z_{2n+1} = 1 - 2 \times 4^n i$.