ATSM

Association Tunisienne des Sciences Mathématiques

Forum du bac Math

Sousse : 22-23 Mars 2010

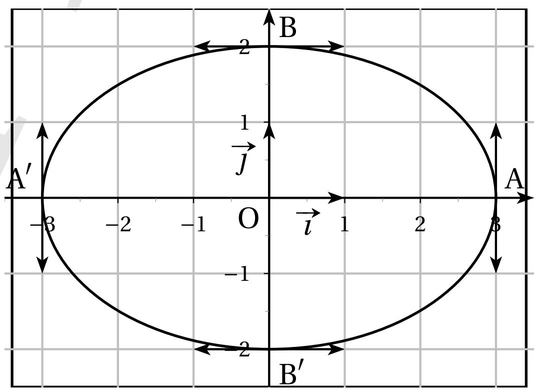
Thème : Coniques

Exercice 1:

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1. Soit D une droite et F un point n'appartient pas à D, on note H le projeté orthogonal d'un point M sur D, l'ensemble Γ, des points M tel que $MH = \ln(2)MF$, est :

   a) Une parabole **b)** une ellipse **c)** une hyperbole.



2. La courbe dessinée ci-contre admet pour équation :

   a) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ **b)** $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ **c)** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

3. Un des foyers de l'ellipse est le point F de coordonnées :

   a) $\mathrm{F}\left(0\,;\,\sqrt{13}\right)$ **b)** $\mathrm{F}\left(\sqrt{13}\,;\,0\right)$ **c)** $\mathrm{F}\left(\sqrt{5}\,;\,0\right)$

4. Une des directrices de l'ellipse est la droite $\mathscr{D}$ d'équation :

   a) $x=\dfrac{4}{\sqrt{13}}$ **b)** $y=\dfrac{4}{9}$ **c)** $x=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$

5. La parabole d'équation $y^2=-4x$ a pour foyer F de coordonnées :

   a) $(2,0)$ **b)** $(0,1)$ **c)** $(-1,0)$

6. et a pour paramètre p égal à

   a) -2 **b)** 2 **c)** 4

Exercice 2:

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$,

on considère l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation : $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ et on désigne par M le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\cos\theta}, 2\tan\theta\right)$, ou θ est un réel de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. (a) Déterminer, par leurs coordonnées les sommets et les foyers de $(\mathscr{H})$.

   (b) Donner les équations cartésiennes des deux asymptotes (Δ_1) et (Δ_2).

   (c) Tracer $(\mathscr{H})$ et placer ses foyers.

   (d) Vérifier que le point M appartient à $(\mathscr{H})$.

2. Soit (T_M) la tangente à $(\mathscr{H})$ en M.
   Montrer qu'une équation de (T_M) dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est : $2x-y\sin\theta-2\cos\theta=0$.

3. On désigne respectivement par P_1 et P_2 les points d'intersections de (T_M) avec les droites (Δ_1) et (Δ_2).

a) Donner les coordonnées des points P_1 et P_2.

b) Montrer que l'aire du triangle OP_1P_2 est indépendante de θ.

Exercice 3:

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$,
on considère la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation $y^2=2x$ et on désigne par M et M' les points des coordonnées respectivement $\left(\dfrac{t^2}{2},t\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2t^2},-\dfrac{1}{t}\right)$ ou t est un réel de $\mathbb{R}^*$.

1. (a) Déterminer, par leurs coordonnées le foyer de $(\mathscr{P})$ et l'équation de la directrice (D).

   (b) Tracer $(\mathscr{P})$ et placer le foyer.

   (c) Vérifier que les points M et M' appartiennent à $(\mathscr{P})$.

2. On désigne respectivement par (T) et $\left(T'\right)$ les tangentes à $(\mathscr{P})$ en M et M'.

   (a) Montrer que les points M, M' et F sont alignés.

   (b) Écrire les équations des tangentes (T) et $\left(T'\right)$.

   (c) Montrer que les tangentes (T) et $\left(T'\right)$ sont perpendiculaires.

   (d) On note H le point intersection de (T) et $\left(T'\right)$. Montrer que H varie sur une droite fixe quand t décrit $\mathbb{R}^*$

Exercice 4:

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$,
on considère l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'équation : $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(2\cos\theta,\sin\theta)$, ou θ est un réel de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. (a) Déterminer, par leurs coordonnées les sommets et les foyers de $(\mathscr{E})$.

   (b) Tracer $(\mathscr{E})$ et placer ses foyers.

   (c) Vérifier que le point M appartient à $(\mathscr{E})$.

2. Soit (T_M) la tangente à $(\mathscr{E})$ en M.
   Montrer qu'une équation de (T_M) dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est : $x\cos\theta+2y\sin\theta-2=0$.

3. Soit $A(2,0)$ et $A(-2,0)$ les sommets $(\mathscr{E})$ situés sur l'axe focal. On désigne respectivement par (T) et $\left(T'\right)$ les tangentes à $(\mathscr{E})$ en A et A'. On désigne respectivement par P et P' les points d'intersections de (T_M) avec les tangents (T) et $\left(T'\right)$.

   (a) Donner les coordonnées des points P et P'.

   (b) Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{A'P'}=1$.

Exercice 5:

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on donne l'application :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathscr{P}\setminus\left(O;\vec{u}\right) & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ & M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}, \text{ avec } z'=\frac{z^2}{z-\overline{z}}.$$

1. (a) Montrer que f n'a aucun point invariant.

   (b) Montrer que pour tout point $M\in\mathscr{P}\setminus\left(O;\vec{u}\right)$, la droite (MM') a une direction fixe.

2. (a) Montrer que si $z \notin \mathbb{R}$, $\left|z' - z\right| = \left|z'\right|$.
   (b) En déduire que M' est le point d'intersection de la médiatrice de $[OM]$ avec la droite Δ passant par M est parallèle à l'axe $\left(O; \vec{v}\right)$.
3. Soit (D) : $y = 2$. Montrer que si M varie (D), alors M' varie sur une parabole fixe $\mathscr{P}$ dont on précisera le foyer et la directrice.

Exercice 6:

Soit z un nombre complexe et $Z = iz^2 + 2z$, avec $z = x + iy$, x et y réel.

1. Donner la forme algébrique de Z en fonction de x et y.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé. On note (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un réel positif.
   (a) Donner une équation cartésienne de (Γ)
   (b) Montrer que (Γ) est une partie d'une hyperbole $(\mathscr{H})$ que l'on précisera.

Exercice 7:

Soi m un paramètre réel strictement positif. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On note (Γ_m) l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant :
$(\ln(m))x^2 + y^2 - 2(\ln^2 m)x - 2(\ln m)y + (\ln^3 m) = 0$.

1. Reconnaître (Γ_1).On suppose dans la suite que $m \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
2. (a) Donner une équation réduite de (Γ_m).
   (b) Discuter suivant m, la nature de (Γ_m).
   (c) Soit I_m le centre de (Γ_m) que décrit I_m quand m décrit $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
3. (a) Déterminer m_0 pour que (Γ_{m_0}) soit un cercle, préciser son centre.

b) Déterminer m_1 pour que (Γ_{m_1}) soit une hyperbole équilatère. Précisera son centre, ses sommets, ses foyers et ses asymptotes.

Exercice 8:

Soit $\theta \in \left]-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right[$. On pose $z = \dfrac{1}{e^{2i\theta} + e^{i\theta} + 1}$

1. Montrer que $z = \dfrac{e^{-i\theta}}{1 + 2\cos\theta}$.
2. On pose $z = x + iy$.
   (a) Montrer que x et y vérifient la relation $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$.
   (b) En déduire que l'image de z dans le plan complexe muni repère orthonormé, appartient à une hyperbole que l'on précisera.

Exercice 9:

Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant : $|x|(x + 2) - 4y^2 = 0$.

1. Montrer que (Γ) est la réunion d'une ellipse $(\mathscr{E})$ et d'une branche d'une hyperbole $(\mathscr{H})$.
2. Donner les éléments remarquables de $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{H})$ et tracer (Γ).