Exercice n°1 : ©

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \text{ , pour tout n } \in \mathbb{N} \end{cases}$.

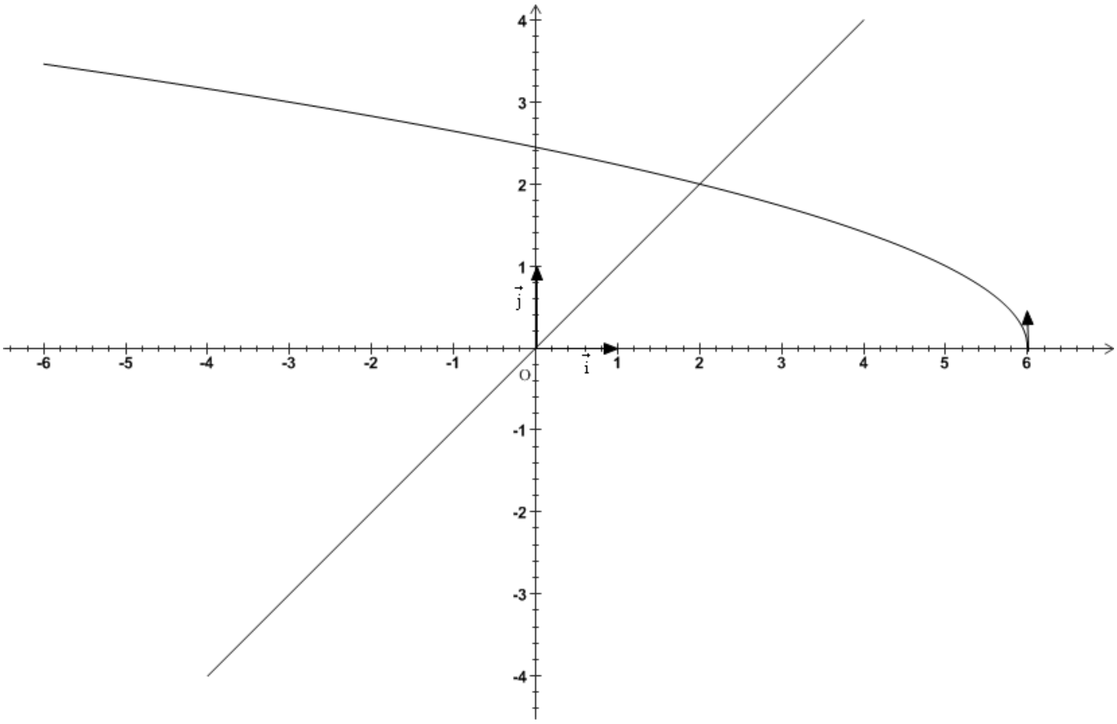
1. a) Montrer que pour tout n de IN, $0 \le u_n < 4$.
   b) Montrer que (u_n) est strictement croissante
   c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$.
   b) Retrouver le résultat de 1. c).

Exercice n°2 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6-u_n} \text{ , pour tout n de IN} \end{cases}$

On note f la fonction définie sur $]-\infty, 6]$ par $f(x) = \sqrt{6-x}$.
Sa courbe est représentée ci – dessous dans un repère orthonormé



1) Placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
2) Répondre par « Vrai ou Faux » aux questions suivantes, en utilisant le graphique :
   a) (u_n) est monotone ; b) $u_{2n} \le u_{2n+1}$; c) $u_{2n} \le u_{2n+2}$; d) $u_{2n+1} \le u_{2n-1}$; e) (u_n) converge vers 2.

a		b		c		d		e	
❑Faux	❑ Vrai	❑Faux	❑ Vrai	❑Faux	❑ Vrai	❑Faux	❑ Vrai	❑Faux	❑ Vrai

3) On se propose dans cette question de démontrer la convergence de la suite (u_n).

a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $|u_{n+1}-2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.

b) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, on a : $|u_n - 2| \leq 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°3 : ©

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $u_n \neq \sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}$.
3. On pose $k = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leq k|u_n - \sqrt{2}|$. En déduire que la suite U converge vers $\sqrt{2}$.
4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < \dfrac{u_{n+2}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}} < 1$.

   En déduire que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.
5. Application : calculer les premiers termes de la suite U et établir les encadrements suivants de $\sqrt{2}$:

   $1 < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$.

Exercice n°4 :

1. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

   a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

   b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

   (on pourra utiliser les variations de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = x(1-x)$).

   c) Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = nu_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   Montrer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle est convergente.

Exercice n°5 :

Soit (U) la suite définie sur IN* par $U_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \dots\dots\dots + \frac{n}{n^2+2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.

1°/a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $\frac{2n}{n+1} \leq U_n \leq \frac{2n+2}{n}$.

b- En déduire que (U) est convergente et calculer sa limite.

2°/a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

b- Déduire que pour tout $n \in IN^*$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}$.

3°/ Soit $S_n = U_1 + U_2 + \dots\dots + U_n$.

a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $2n - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n+1}) \leq S_n \leq 2n + 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n})$

b- En déduire que pour tout $n \in IN^*$: $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$; puis calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice n°6 :

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in IN^*$: $U_n = (1 - \frac{1}{2n})U_{n-1}$.

1°/Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_n > 0$.

2°/Soit (V_n) définie sur IN par : $V_n = \sqrt{n+1}\,U_n$.

a- Exprimer : $V^2_{n+1} - V^2_n$ en fonction de n et de U^2_n.

b- Déduire que (V_n) est décroissante et que pour tout $n \in IN$: $U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

3°/ Soit (W_n) la définie sur IN par : $W_n = \sqrt{n}\,U_n$.

a- Montrer que (W_n) est croissante.

b- Déduire que pour tout $n \in IN^*$: $U_n \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}$.

4°/ Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5°/a- Calculer U_n en fonction de n.

b-En déduire $\lim_{n \to +\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

Exercice n°7 :

Le but de cet exercice est l'étude de la suite (S_n) définie, pour $n \geq 2$, par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

1. On pose pour $n \geq 2$: $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

2. Montrer que, pour $n \geq 2$: $\frac{2}{1-z} = 1 + i\frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

3. En déduire que, pour $n \geq 2$: $S_n = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

4. Etudier la limite de la suite (u_n) définie, pour $n \geq 2$, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.

Exercice n°8 : ©

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$.

Soit D la droite munie d'un repère $(O, \vec{i})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Comparer a_n et b_n. Etudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n).
4. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite constante.
6. Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite.

Exercice n°9 :

On définit deux suites u et v sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes de u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. a) Vérifier que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}.$$

   b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

   $0 < u_n < v_n$.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

4. Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut – on déduire ?
5. On pose pour tout entier naturel n : $a_n = u_n v_n$.
   a) Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
   b) En calculant de deux façons différentes la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$, déterminer la limite commune ℓ des suites u et v.
6. En utilisant u_2 et v_2, donner un encadrement de ℓ par deux décimaux, d'amplitude 0.04.

Exercice n°10 : *(Contrôle 2009)* ©

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq v_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.
4. Soit la suite (w_n) définie sur IN par $w_n = 9u_n + 5v_n$
   a) Montrer que (w_n) est une suite constante.
   b) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice n°11 :

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

1. Vérifier que : $u_1 = 2$ et $v_1 = 3$, puis calculer u_2, u_3, v_2 et v_3.
2. Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.
3. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n \times (n+1) \times (n+1)!}$.
   b) En déduire que (v_n) est une suite strictement décroissante.
4. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $n! \geq n$.
   b) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} n!$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n \times n!}$.
   c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice n°12 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$, par : $u_n = \frac{1}{n^2}$, et on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

Le but de cet exercice est l'étude de la convergence de la suite (S_n) de deux façons différentes

Partie préliminaire

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Démontrer que la suite (S_n) est une suite croissante.

Partie 1 : Convergence de (S_n) – Méthode 1

On considère la suite (v_n), définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $v_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$, et on pose : $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$

1. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $T_n = 2 - \dfrac{2}{n+1}$.

   b) En déduire que la suite (T_n) est une suite majorée.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n \leq v_n$.
3. Démontrer que la suite (S_n) converge vers un nombre réel l.

Partie 2 : Convergence de (S_n) – Méthode 2 et valeur approchée de l

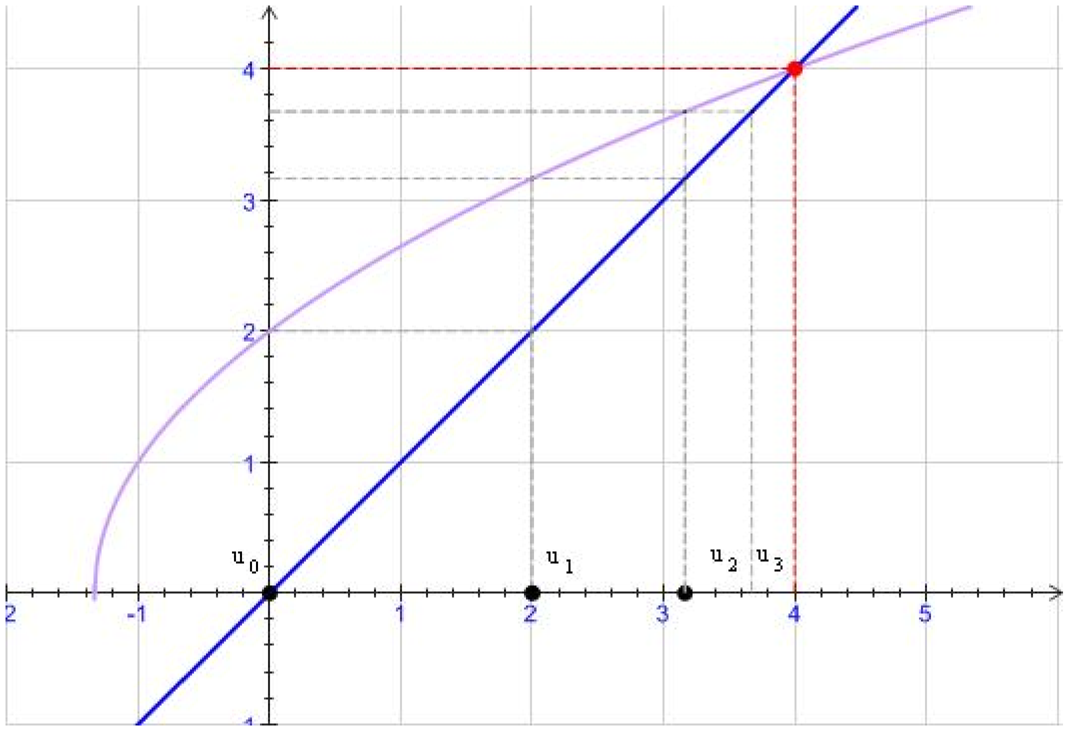
On considère la suite (w_n), définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $w_n = S_n + \dfrac{1}{n}$.

1. Démontrer que les deux suites (S_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (S_n) converge vers un nombre réel l.

Exercice n°1 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \text{ , pour tout n } \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Illustration graphique de la suite :



Conjecture : *La suite (u_n) est croissante, majorée par 4 et elle converge vers 4.*

Réponses :

1. a) Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $0 \le u_n < 4$.

- Pour n = 0, $0 \le u_0 = 0 < 4$
- Pour n ≥ 0, supposons que $0 \le u_n < 4$ et montrons que $0 \le u_{n+1} < 4$

En effet :

$0 \le u_n < 4 \Rightarrow 0 \le 3u_n < 12 \Rightarrow 4 \le 4+3u_n < 16 \Rightarrow \sqrt{4} \le \sqrt{4+3u_n} < \sqrt{16} \Rightarrow 0 \le 2 \le u_{n+1} < 4$

Ainsi $\forall$ n $\in$ IN, $0 \le u_n < 4$.

b) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 4+3u_n - u_n^2 = \underbrace{(1+u_n)}_{>0 \text{ car } u_n \ge 0}\underbrace{(4-u_n)}_{>0 \text{ car } u_n < 4} > 0 \Rightarrow u_{n+1}^2 > u_n^2 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \quad (u_n > 0)$

$\Rightarrow (u_n)$ est strictement croissante

c) (u_n) est croissante et majorée par 4 donc (u_n) est convergente. Soit ℓ la limite de (u_n)

$$\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } \ell \in [0,4] \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{4+3u_n}, \text{ avec } f(x) = \sqrt{4+3x}\ x \in \left[-\dfrac{4}{3}, +\infty\right[\Rightarrow f(\ell) = \ell \\ f \text{ est continue sur } \left[-\dfrac{4}{3}, +\infty\right[\text{ donc en } \ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+3\ell} = \ell, \text{ avec } \ell \in [0,4] \Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell - 4 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\ell = -1}_{\text{à rejeter}} \text{ ou } \ell=4 \Rightarrow \ell=4$$

2. *Autre procédé de convergence :*

a) $$4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{4+3u_n} = \frac{12-3u_n}{4+\sqrt{4+3u_n}} = \frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{4+3u_n}}$$

Or $u_n \geq 0 \Rightarrow \sqrt{4+3u_n} \geq 2 \Rightarrow 4+\sqrt{4+3u_n} \geq 6 \Rightarrow \dfrac{1}{4+\sqrt{4+3u_n}} \leq \dfrac{1}{6}$

$$\Rightarrow 4 - u_{n+1} = \frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{4+3u_n}} \leq \frac{3}{6}(4-u_n) = \frac{1}{2}(4-u_n)$$

b)

$4 - u_{k+1} \leq \dfrac{1}{2}(4-u_k)$, pour tout k de IN

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pour k = 0, } 0<4-u_1 \leq \dfrac{1}{2}(4-u_0) \\ \text{Pour k = 1, } 0<4-u_2 \leq \dfrac{1}{2}(4-u_1) \\ \text{Pour k = 2, } 0<4-u_3 \leq \dfrac{1}{2}(4-u_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{Pour k = n - 1, } 0<4-u_n \leq \dfrac{1}{2}(4-u_{n-1}) \end{array}\right\}$$

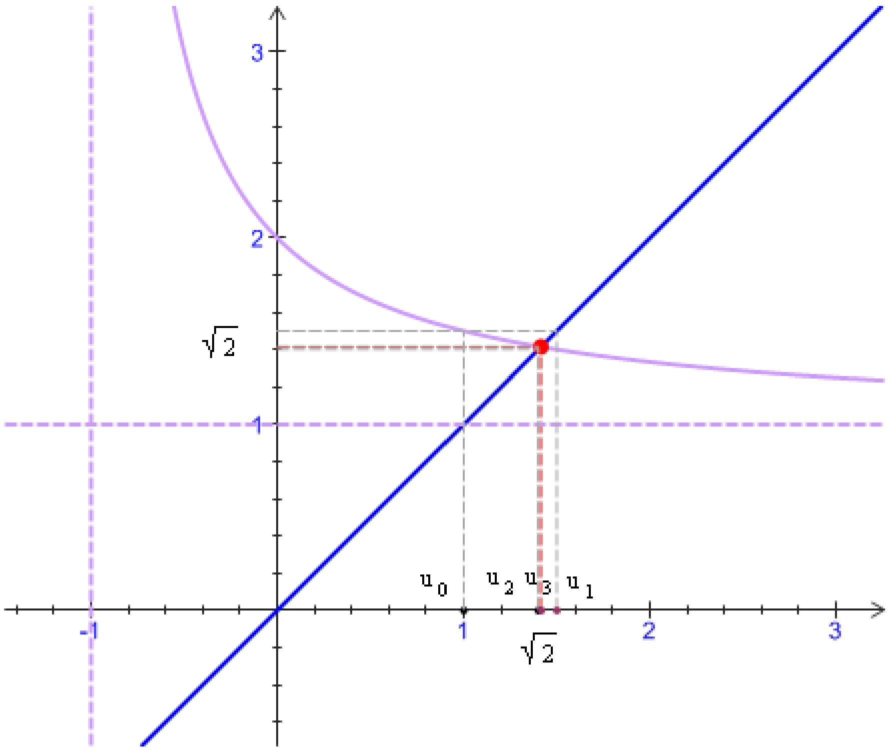
On fait le produit terme à terme et on simplifie on aura $0<4-u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (4-u_0) = 4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$0<4-u_n \leq 4\times\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\searrow 0} \Rightarrow (u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 4$$

Exercice n°3 :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$$

Illustration graphique de la suite :



Conjecture :

- La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$
- La suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$
- La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$

Réponses :

1. Montrons par récurrence que pour tout n de IN, on a : $u_n \geq 1$ et $u_n \neq \sqrt{2}$.

- Pour n = 0, $u_0 = 1 \geq 1$ et $u_0 = 1 \neq \sqrt{2}$.
- Pour n ≥ 0, supposons que $u_n \geq 1$ et $u_n \neq \sqrt{2}$ et montrons que $u_{n+1} \geq 1$ et $u_{n+1} \neq \sqrt{2}$.

  En effet :

  $$u_n \geq 1 \Rightarrow 1 + u_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+u_n} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{1+u_n} \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$$

$$u_n \neq \sqrt{2} \Rightarrow 1+u_n \neq 1+\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{1+u_n} \neq \frac{1}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{1+u_n} \neq \sqrt{2}-1 \Rightarrow 1+\frac{1}{1+u_n} \neq \sqrt{2} \Rightarrow u_{n+1} \neq \sqrt{2}$$

Ainsi $\forall$ n $\in$ IN, $u_n \geq 1$ et $u_n \neq \sqrt{2}$.

2. $\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}$?

$$\left(u_{n+1}-\sqrt{2}\right)(1+u_n) = \left(1+\frac{1}{1+u_n}-\sqrt{2}\right)(1+u_n) =$$

$$\left(1-\sqrt{2}\right)(1+u_n)+1 = \left(1-\sqrt{2}\right)(1+u_n)-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) = \left(1-\sqrt{2}\right)\left(u_n-\sqrt{2}\right)$$

3. $k = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

- $\left|\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}\right| = \left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}\right| = \dfrac{\sqrt{2}-1}{1+u_n}$

Or $1+u_n \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+u_n} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}-1}{1+u_n} \leq \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}-1}{1+u_n} \leq k$

$\Rightarrow \left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right| \leq k\left|u_n-\sqrt{2}\right|$

-

$\left|u_{p+1}-\sqrt{2}\right| \leq k\left|u_p-\sqrt{2}\right|$, $\forall$ p $\in$ IN

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pour p = 0, } \left|u_1-\sqrt{2}\right| \leq k\left|u_0-\sqrt{2}\right| \\ \text{Pour p = 1, } \left|u_2-\sqrt{2}\right| \leq k\left|u_1-\sqrt{2}\right| \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{Pour p = n - 1, } \left|u_n-\sqrt{2}\right| \leq k\left|u_n-\sqrt{2}\right| \end{array}\right\}$$

On fait le produit terme à terme et on simplifie, on obtient :

$$\left|u_n-\sqrt{2}\right| \leq k^n \underbrace{\left|u_0-\sqrt{2}\right|}_{\sqrt{2}-1} \leq k^n$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$ car $k \in]-1,1[\Rightarrow (u_n)$ converge vers $\sqrt{2}$

4. $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{u_{n+2}-\sqrt{2}}{u_{n+1}-\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_{n+1}} \\ \dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n} \end{array}\right\}$$

On fait le produit terme à terme et on simplifie, on obtient :

$$0<\frac{u_{n+2}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}=\frac{\overbrace{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}^{>0}}{\underbrace{\left(1+u_{n+1}\right)\left(1+u_n\right)}_{>0}}\underset{\text{car}\,1+u_n\geq 2\text{ et }1+u_{n+1}\geq 2}{\leq}\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{4}=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}<1$$

- Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $u_{2n}<\sqrt{2}$

  Pour n = 0, $u_0=1<\sqrt{2}$

  Pour n ≥ 0, supposons que $u_{2n}<\sqrt{2}$ et montrons que $u_{2n+2}<\sqrt{2}$

  En effet : $\frac{u_{2n+2}-\sqrt{2}}{u_{2n}-\sqrt{2}}>0$ et $u_{2n}-\sqrt{2}<0\Rightarrow u_{2n+2}-\sqrt{2}<0\Rightarrow u_{2n+2}<\sqrt{2}$

  Ainsi ∀ n ∈ IN, $u_{2n}<\sqrt{2}$
- Montrons que la suite (u_{2n}) est croissante :

  $\frac{u_{2n+2}-\sqrt{2}}{u_{2n}-\sqrt{2}}<1$ et $u_{2n}-\sqrt{2}<0\Rightarrow u_{2n+2}-\sqrt{2}>u_{2n}-\sqrt{2}\Rightarrow u_{2n+2}>u_{2n}$

  On montre de même que $u_{2n+1}>\sqrt{2}$ et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

5. $u_0=1,\ u_1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ u_2=1+\frac{1}{\frac{3}{2}+1}=\frac{7}{5},\ u_3=1+\frac{1}{\frac{7}{5}+1}=\frac{17}{12},\ u_4=1+\frac{1}{\frac{17}{12}+1}=\frac{41}{29},\ u_5=1+\frac{1}{\frac{41}{29}+1}=\frac{99}{70}$

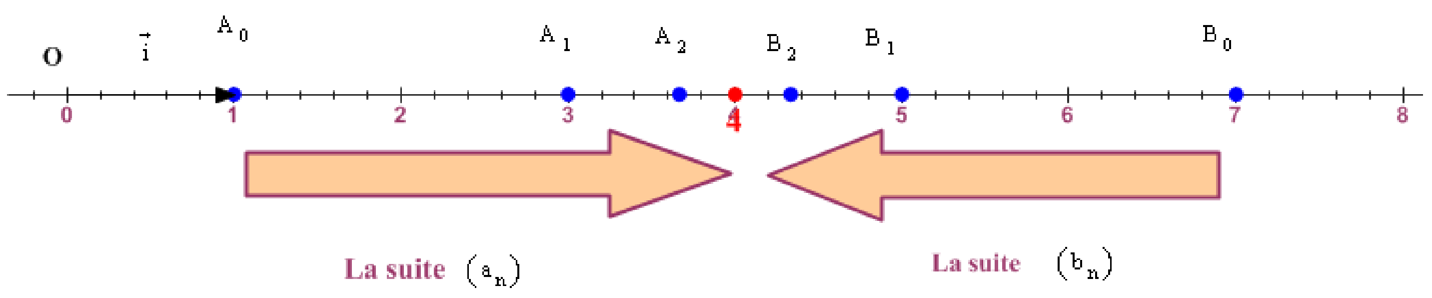
.

Puisque : $u_0<u_2<u_4<\sqrt{2}<u_5<u_3<u_1\ \Rightarrow 1<\frac{7}{5}<\frac{41}{29}<\sqrt{2}<\frac{99}{70}<\frac{17}{12}<\frac{3}{2}$

Exercice n°8 :

(a_n) et (b_n) sont deux suites définies par $a_0=1$, $b_0=7$ et $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n) \end{cases}$.

1.



2. $u_n = b_n - a_n$

- $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) - \frac{1}{3}(2a_n + b_n) = \frac{1}{3}(b_n - a_n) = \frac{1}{3}u_n$

$\Rightarrow (u_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = 6$.

- $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$, pour tout n de IN.

3. $u_n = b_n - a_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0 \Rightarrow b_n > a_n$, $\forall$ n $\in$ IN.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{3}\left(\underbrace{-a_n + b_n}_{>0}\right) > 0 \Rightarrow (a_n) \text{ est croissante.}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) - b_n = \frac{1}{3}\left(\underbrace{a_n - b_n}_{<0}\right) < 0 \Rightarrow (b_n) \text{ est décroissante.}$$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, car (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$.

$$\left.\begin{array}{l} (a_n) \text{ est croissante} \\ (b_n) \text{ est décroissante} \\ a_n < b_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont deux suites adjacentes.}$$

5. $v_n = a_n + b_n$

$$v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) + \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) = a_n + b_n = v_n \Rightarrow (v_n) \text{ est une suite constante.}$$

$v_0 = a_0 + b_0 = 8 \Rightarrow v_n = a_n + b_n = 8$, $\forall$ n $\in$ IN.

6. (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes $\Rightarrow (a_n)$ et (b_n) sont convergentes et elles convergent vers la même limite.

Soit ℓ leur limite commune $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n = 2\ell = 8 \Rightarrow \ell = 4$.

Exercice n°10 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \;;\; u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 \;;\; v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

1. Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $u_n \leq v_n$:

- Pour n = 0, $u_0 = 0 \le v_0 = 1$
- Pour n ≥ 0, supposons que $u_n \le v_n$ et montrons que $u_{n+1} \le v_{n+1}$

  En effet :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{9u_n + 6v_n - 10u_n - 5v_n}{15} = \frac{\overbrace{v_n - u_n}^{\ge 0}}{15} \ge 0$$

$\Rightarrow u_{n+1} \le v_{n+1}$.

Ainsi ∀ n ∈ IN, $u_n \le v_n$.

2. Monotonie de la suite (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{v_n - u_n}{3} \ge 0 \Rightarrow \text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}$$

Monotonie de la suite (v_n) :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - v_n = \frac{3(u_n - v_n)}{5} \le 0 \Rightarrow \text{La suite } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

3. On pose $t_n = v_n - u_n$, dans la réponse de la question 1, on a montré que

$t_{n+1} = v_{n+1} - u_{N+1} = \frac{1}{15}(v_n - u_n) = \frac{1}{15} t_n \Rightarrow$ la suite (t_n) est géométrique de raison $\frac{1}{15} \in]-1,1[\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

Ainsi on a : $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ u_n \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$ les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et par suite elles sont convergentes et elles convergent vers la même limite.

4. $w_n = 9u_n + 5v_n$.

a)
$$w_{n+1} = 9u_{n+1} + 5v_{n+1} = 9\left(\frac{2u_n + v_n}{3}\right) + \cancel{5}\left(\frac{3u_n + 2v_n}{\cancel{5}}\right) = \frac{18u_n + 9v_n}{3} + 3u_n + 2v_n$$
$$= \frac{27u_n + 15v_n}{3} = 9u_n + 5v_n = w_n$$

$\Rightarrow (w_n)$ est une suite constante et on a : ∀ n ∈ IN, $w_n = 9u_n + 5v_n = w_0 = 9u_0 + 5v_0 = 5$

b) Soit ℓ la limite commune de (u_n) et (v_n)

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(9\underbrace{u_n}_{\ell} + 5\underbrace{v_n}_{\ell}\right) = 5 \Rightarrow 14\ell = 5 \Rightarrow \ell = \frac{5}{14}$