Exercice n°1 : Vrai - Faux

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$

On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

a. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

b. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.

d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite finie.

Exercice n°2 : Q – C – M :

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation a.	Si (u_n) est monotone décroissante et minorée et (v_n) est monotone croissante et majorée alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
Affirmation b.	Si on a $a^n < u_{n+1} - u_n < b^n$ avec a et b dans l'intervalle $]0\,;1[$ alors u_n converge.
Affirmation c.	Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et pour tout $x > 1$, on a : $f'(x) = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$.

Exercice n°3 : Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances (ROC).

PARTIE A : QUESTION DE COURS

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante : « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

PARTIE B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Correction ex1

a. **Faux** : Si la suite v_n est arithmétique, $v_{n+1}-v_n$ est constante :

$$v_{n+1}-v_n=(u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n-2u_{n+1}+u_n=-\frac{5}{3}u_{n+1}+\frac{5}{3}u_n=-\frac{5}{3}v_n\ ;$$

c'est donc faux, mais nous gagnons une information intéressante : $v_{n+1}=-\frac{5}{3}v_n+v_n=-\frac{2}{3}v_n$; v_n est géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=1-0=1$ d'où $v_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

b. **Vrai :** Recommençons :

$w_{n+1}-w_n=u_{n+2}+\frac{2}{3}u_{n+1}-u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}u_{n+1}-u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=0$ donc c'est vrai. En plus on a $w_n=w_0=u_1+\frac{2}{3}u_0=1$.

c. **Vrai :** $\frac{3}{5}(w_n-v_n)=\frac{3}{5}\left(u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n-u_{n+1}+u_n\right)=\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}u_n\right)=u_n$.

d. **Faux :** Remplaçons pour calculer u_n : $u_n=\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$ dont la limite est $\frac{3}{5}$.

Correction ex2

Affirmation a.	Faux : il faudrait par exemple en plus que v_n-u_n tende vers 0.
Affirmation b.	Vrai : u_n est croissante, et si on fait la somme des inégalités $a^n<u_{n+1}-u_n<b^n$, on a $\sum_k a^k<u_{n+1}-u_0<\sum_k b^k \Leftrightarrow \frac{1-a^{n+1}}{1-a}+u_0<u_{n+1}<\frac{1-b^{n+1}}{1-b}+u_0<\frac{1}{1-b}+u_0$; donc u_n est bornée.
Affirmation c.	Vrai : $f(x)=1+x+x^2+...+x^n \Rightarrow f'(x)=1+2x+...+nx^{n-1}$.

Correction ex3

PARTIE A : « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

On a $u_n\le v_n$ et (v_n) décroissante donc $u_n\le v_n\le ...\le v_0$ d'où (u_n) est majorée et converge vers l ; même chose pour (v_n) qui est décroissante et minorée par u_0 et converge vers l'.

Comme $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a $l-l'=0\Rightarrow l=l'$.

PARTIE B : (u_n) non nulle, $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente :

Faux : n'importe quelle suite convergente vers 0 ne marche pas, prendre par exemple $1/n$.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par −1 :

Vrai : $2 \le u_n \Rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{2}{2} \le -\frac{2}{u_n} \Rightarrow -1 \le v_n$.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante :

Faux ; $v_{n+1} - v_n = \frac{-2}{u_{n+1}} - \frac{-2}{u_n} = \frac{-2(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$; si (u_n) est décroissante, $u_{n+1} \le u_n \Rightarrow 0 \le u_n - u_{n+1}$, le numérateur est négatif, si le dénominateur est positif, soit lorsque la suite (u_n) n'a que des termes positifs, (v_n) est décroissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Faux : une suite peut être divergente sans tendre vers l'infini, par exemple $u_n = (-1)^n$ diverge, de même évidemment que v_n.