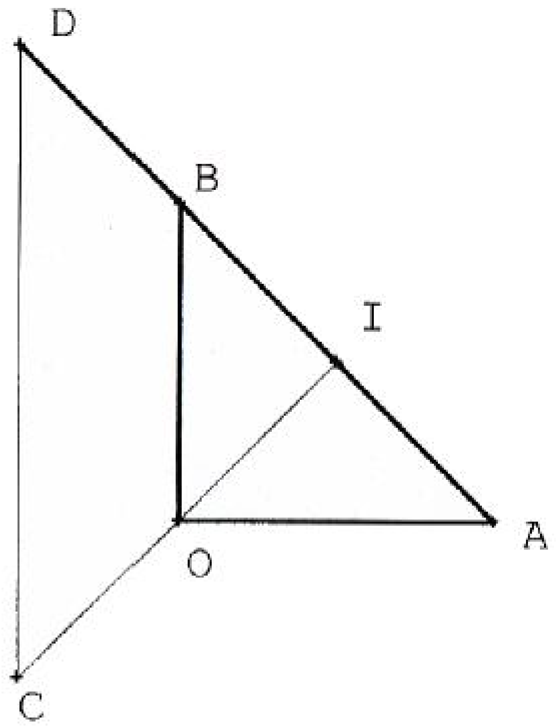
Session principale 2008 : ©

Le plan est orienté dans le sens direct.

OAB est un triangle rectangle et isocèle tel que OA = OB et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

on désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

(Voir figure)



Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1. Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
   b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).
   Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f.
3. Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D.
   a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire g (O).
   b) Déterminer les images de C et D par g o f^{-1}. En déduire la nature de g o f^{-1}.
4. Soit I ′ = f (I) et J ′ = g (J)

a) Déterminer les images des points J et I ′ par g o f^{-1}.

b) Montrer que les droites (IJ), (I ′ J ′) et (CD) sont concourantes.

Session principale 2009 : ©

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AC] et [JC].

1. Faire une figure
2. Soit f la similitude directe de centre J qui envoie A sur K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Justifier que f (K) = L.

c) Soit H le milieu du segment [AJ]. Justifier que f (I) = H.

3. On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M ′ d'affixe z ′ tel que z ′ = $-\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+i}{2}$

a) Montrer que φ est similitude indirecte de centre C.

b) Donner les affixes des points I , K, J et H.

c) Déterminer φ (I) et φ (J).

d) Déduire alors que φ = f o $S_{(IK)}$, (où f est la similitude définie dans 2° et $S_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4. Soit Δ l'axe de la similitude φ.

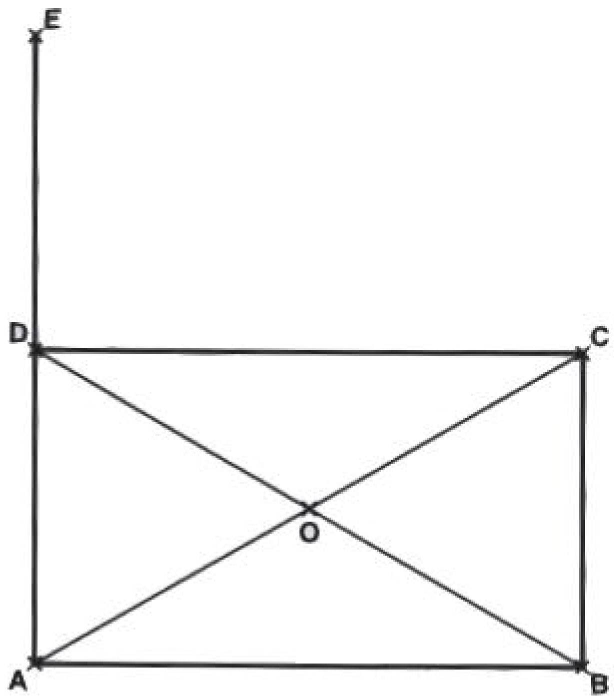
a) Tracer Δ.

b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.

Montrer que φ (P) = f (P) et en déduire que φ (P) = Q.

Session de contrôle 2009 : ©

ABCD est un rectangle de centre O et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D. (Voir figure)



Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. a) Justifier que S (A) = B.

b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que S (E) = O.

2. Soit I un point du segment [EO], distinct des points E et O et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A.

   Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P.

   a) Tracer (Γ) et placer les points M et P.

   b) Justifier que le point C appartient à (Γ).

3. Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP).

   a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

   b) En déduire que S (M) = N.

4. Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Session principale 2008 :

1. f est une similitude directe telle que : f (A) = D et f (O) = C.

   Soit k le rapport de f et α une mesure de l'angle de f.

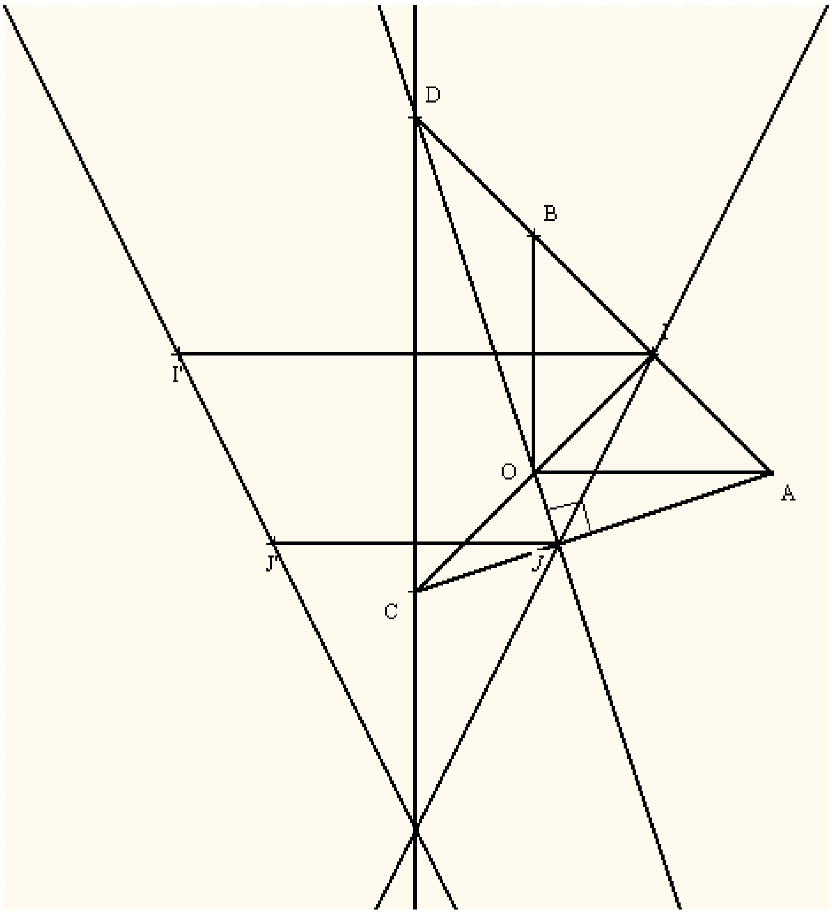
   On a : $k = \frac{DC}{OA} = \frac{2OB}{OA} = 2$ et

   $\alpha \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AO},2\overrightarrow{BO}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2. a) (AO) ⊥ (OB) et (OB) // (CD) ⇒ (AO) ⊥ (CD)

   (CO) = (OI) ⊥ (AB) = (AD)

   ⇒ O est l'orthocentre du triangle ACD.



   b) f (OJ) est la perpendiculaire à (OJ) passant par f (O) = C ⇒ f (OJ) = (AC)

   f (AJ) est la perpendiculaire à (AJ) passant par f (A) = D ⇒ f (AJ) = (DJ)

   J ∈ (OJ) ∩ (AJ) ⇒ f (J) ∈ (AC) ∩ (DJ) ⇒ f (J) = J ⇒ J est le centre de f.

3. g est la similitude indirecte telle que g (I) = I et g (A) = D

a) Soit k ′ le rapport de g $\Rightarrow$ $k' = \dfrac{ID}{IA} = \dfrac{2IB}{IA} = 2$

Soit Δ l'axe de g $\Rightarrow$ Δ est la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}\right) \Rightarrow$ Δ = (IC).

g (O) = $h_{(I,2)} \circ S_{(IC)}(O) = h_{(I,2)}(O) = C$.

b) g o f^{-1} (C) = g (O) = C et g o f^{-1} (D) = g (A) = D

g o f^{-1} est une similitude indirecte qui fixe deux points distincts C et D $\Rightarrow$ g o f^{-1} est un antidéplacement qui fixe C et D $\Rightarrow$ g o f^{-1} = $S_{(CD)}$.

4. I ′ = f (I) et J ′ = g (J)

a) g o f^{-1} (J) = g (J) = J ′ = $S_{(CD)}$ (J)

g o f^{-1} (I ′) = g (I) = I = $S_{(CD)}$ (I ′)

$S_{(CD)}$(IJ) = (I ′ J ′) ; (IJ) et (CD) sont sécantes en un point ω car si non :

On aura (IJ) // (CD) et (JJ′) $\perp$ (CD) $\Rightarrow$ (IJ) $\perp$ (JJ′).

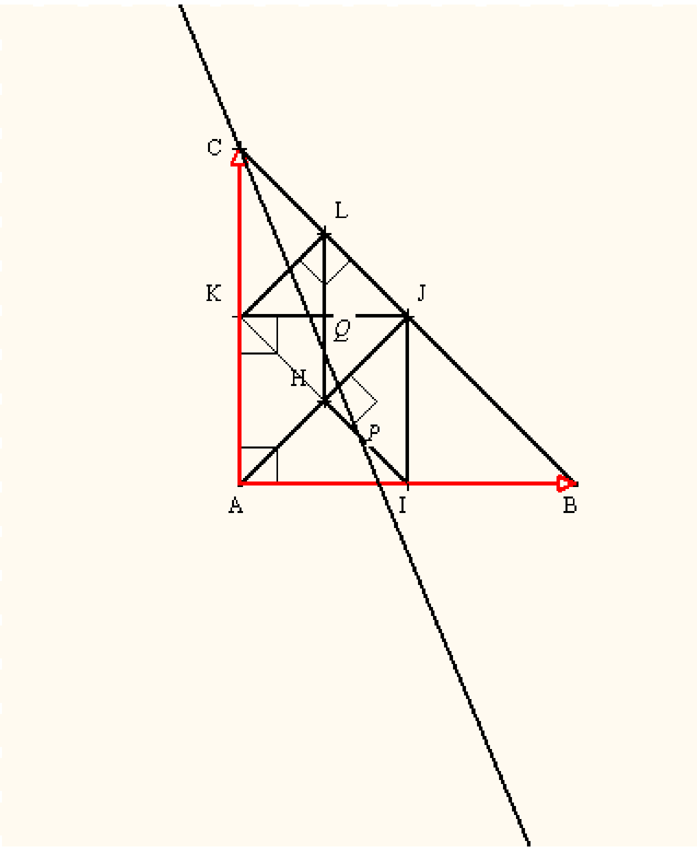
De plus on a : f(I) = I′ et f(J) = J $\Rightarrow$ (IJ) $\perp$ (I′J).

$\Rightarrow$ (JJ′) // (I′J) $\Rightarrow$ J, I′ et J′ sont alignés, ce qui n'est pas le cas $\Rightarrow$ (I′J′) et (CD) sont sécantes en ω

Ainsi (IJ), (CD) et (I′J′) sont sécantes en ω.

Session principale 2009 :

1. Figure



2. f la similitude directe telle que f (J) = J et f (A) = K.

   a) Soit k le rapport de f et α une mesure de l'angle de f.

$$\alpha \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JK}}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$k = \frac{JK}{JA} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   b) Le triangle LKJ est rectangle et isocèle en L tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{LK}, \overrightarrow{LJ}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{JL}{JK} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JL}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \text{f (K) = L.}$$

   c) Le triangle HIJ est rectangle et isocèle en H tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

   d) $$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{JH}{JI} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JH}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \text{f (I) = H.}$$

3. φ : M(z) $\rightarrow$ M ' (z ') tel que : z ' = $-\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z} + \frac{1+i}{2}$

   a) z ' = $a\overline{z} + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ φ est une similitude indrecte de rapport

$|a| = \left|-\left(\frac{1+i}{2}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$ et de centre ω d'affixe

$$\frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2} = \frac{-\left(\frac{1+i}{2}\right)\times\left(\frac{1-i}{2}\right)+\left(\frac{1+i}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}+\left(\frac{1+i}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = i = z_C \Rightarrow \omega = \text{C.}$$

   b) $z_I = \frac{1}{2}$, $z_K = \frac{1}{2}$i , $z_J = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$i et $z_H = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$.

   c) Soit φ (I) = I ' $\Rightarrow$ $z_{I'} = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z_I} + \frac{1+i}{2} = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\times\frac{1}{2} + \frac{1+i}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i = z_H$ $\Rightarrow$ φ (I) = H.

   Soit φ (J) = J ' $\Rightarrow$ $z_{J'} = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z_J} + \frac{1+i}{2} = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\times\left(\frac{1-i}{2}\right) + \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}i = z_K$ $\Rightarrow$ φ (J) = K.

d) f o $S_{(IK)}$ est une similitude indirecte telle que :

f o $S_{(IK)}$ (I) = f (I) = H = φ (I) et f o $S_{(IK)}$ (J) = f (A) = K = φ (J)

f o $S_{(IK)}$ et φ sont deux similitudes indirectes qui coincident sur deux points distincts I et J donc

f o $S_{(IK)}$ et φ sont identiques.

4. Δ est l'axe de la similitude φ

a) φ (C) = C et φ (J) = K ⇒ Δ est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CK}\right)$. (Voir figure)

b) φ (P) = f o $S_{(IK)}$ (P) = f (P)

P ∈ Δ ⇒ φ (P) ∈ φ (Δ) ⇒ φ (P) ∈ Δ

P ∈ (IK) ⇒ φ (P) = f (P) ∈ f((IK)) = (HL)

⇒ φ (P) ∈ Δ ∩ (HL) ⇒ φ (P) = Q

Session de contrôle 2009 :

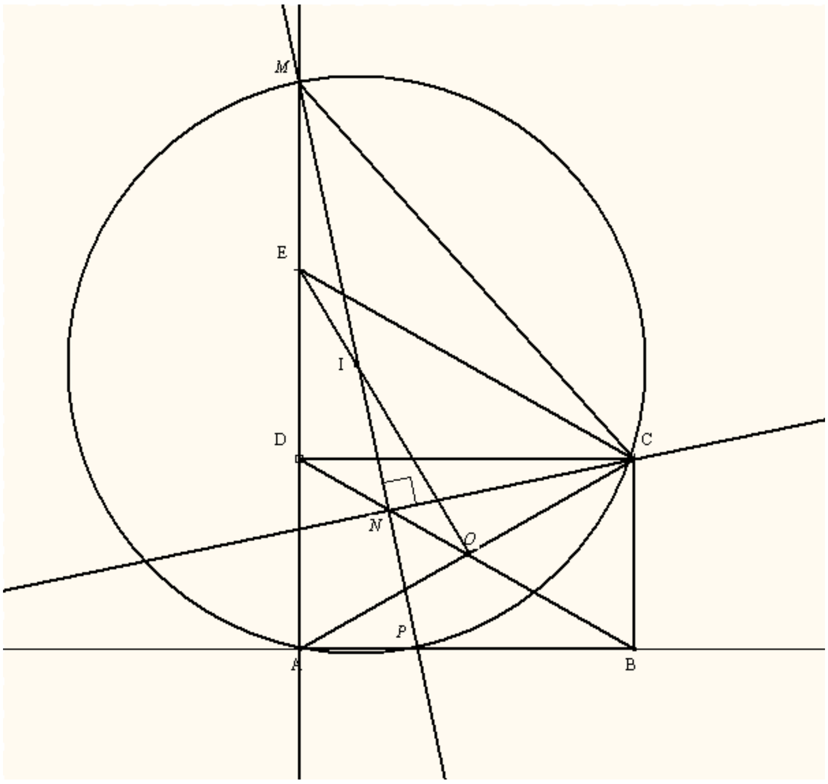
1. S la similitude directe telle que : S (C) = C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$: $S = S_{\left(C,\frac{1}{2},\frac{\pi}{3}\right)}$.

a) $\frac{CB}{CA} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$ ⇒ S (A) = B.

b) AE = 2AD et AC = $\frac{AD}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2AD$ ⇒ AE = AC, de plus on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\left[2\pi\right]$ ⇒ ACE est

équilatéral.

2. a) Voir figure



b) $I \in (EO) =$ méd$[AC] \Rightarrow IA = IC \Rightarrow C \in (\Gamma)$.

3. a) $\left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{MC}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ (car M et A appartiennent au même arc orienté $\overset{\frown}{CP}$

b) Le triangle NCM est rectangle en N tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\Rightarrow \frac{CN}{CM} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow$ S (M) = N.

4. S (A) = B ; S (M) = N ; S (E) = D et A, M et E sont alignés $\Rightarrow$ B, N et D sont alignés

(N. B : S (E) = D car DEC est un triangle rectangle en D et $\left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$).