Série d'exercices *** $4^{ème}$ Maths
LES N. COMPLEXES

Lycée Secondaire Ali Zouaoui
" Hajeb Laayoun "

I / L'ensemble des nombres complexes :

***Définition** : On appelle ensemble des nombres complexes , et on note $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres $Z = a + i\,b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et i un nombre vérifiant $i^2 = -1$.*

- *a est appelé partie réelle de Z , notée $\mathrm{Re}(Z)$.*
- *b est appelé partie imaginaire de Z , noté $\mathrm{Im}(Z)$.*
- *pour tout $Z \in \mathbb{C}$: Z est réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(Z) = 0$; Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0$.*

***Opération** : les propriétés des opération dans $\mathbb{C}$ sont les même que celle dans $\mathbb{R}$ avec $i^2 = -1$.*

***Théorème** : Tout nombre complexe non nul $Z = a + i\,b$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ admet un inverse Z'*

(c'est-à-dire un nombre complexe Z' vérifiant : $ZZ' = 1$) on a : $Z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + i\left(-\dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)$;

Z' est noté $\dfrac{1}{Z}$.

***Remarque :** En pratique , pour le calcul de l'inverse et du quotient , on ne tient pas la formule , mais on fait intervenir « à propos » l'égalité : $(a + i\,b)(a - i\,b) = a^2 + b^2$.*

II / Conjugué d'un nombre complexe :

***Définition :** soit $Z = a + i\,b$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe , on appelle conjugué de Z le nombre complexe $\overline{Z} = a - i\,b = \mathrm{Re}(Z) - i\,\mathrm{Im}(Z)$.*

Remarque :
- *pour tout $Z \in \mathbb{C}$: Z est réel $\Leftrightarrow Z = \overline{Z}$.*
- *pour tout $Z \in \mathbb{C}$: Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Z = -\overline{Z}$.*

***Théorème :** Pour tous nombres complexes Z et Z' , et tout entier naturel n on a :*

$$\overline{Z + Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'} \ ; \ \overline{-Z} = -\overline{Z} \ ; \ \overline{Z.Z'} = \overline{Z}.\overline{Z'} \ ; \ \overline{Z^n} = \overline{Z}^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{Z'}\right)} = \frac{1}{\overline{Z'}} \ ; \ \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}} \ ; \ (Z' \in \mathbb{C}^*).$$

III / Module d'un nombre complexe :

***Définition :** Soit $Z = a + i\,b$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe ; on appelle module de Z le réel positif : $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{[\mathrm{Ré}(Z)]^2 + [\mathrm{Im}(Z)]^2} = \sqrt{Z.\overline{Z}}$.*

Propriétés des modules :

***Théorème :** Pour tous nombres complexes Z et Z' on a :*

- $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$
- $|Z + Z'| \le |Z| + |Z'|$ *(Inégalité triangulaire)* .
- $|Z.Z'| = |Z|.|Z'|$ et $\left|\dfrac{Z}{Z'}\right| = \dfrac{|Z|}{|Z'|}$; $(Z' \in \mathbb{C}^*)$.
- $|Z^n| = |Z|^n$; $(n \in \mathbb{N}^*)$.
- $|\lambda.Z| = |\lambda|.|Z|$; $(\lambda \in \mathbb{R})$.

IV / Argument d'un nombre complexe non nul :

Définition : Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ et M l'image de Z dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$; on appelle argument de Z et on note $Arg(Z)$ toute mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

Remarques : * Si θ est un argument de Z , tout autre argument de Z est de la forme : $\theta + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$, ce que l'on traduit par l'écriture $Arg(Z) \equiv \theta[2\pi]$.

* $\begin{cases} Z = Z' \\ (Z, Z') \in \mathbb{C}^{*2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = |Z'| \\ Arg(Z) \equiv Arg(Z')[2\pi] \end{cases}$ car l'égalité des modules définit l'appartenance à un même cercle de centre O et celle des arguments l'appartenance à une même demi-droite d'origine O .

Argument d'une différence :

Théorème : Soit Z_A et Z_B deux nombres complexes distincts , d'image respectives A et B alors : $Arg(Z_B - Z_A) \equiv (\vec{u},\overrightarrow{AB})[2\pi]$.

Forme trigonométrique :

Théorème : Soit $Z \in \mathbb{C}^*$

* Z s'écrit $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |Z|$ et $\theta \equiv Arg(Z)[2\pi]$.
* Si $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ alors $r = |Z|$ et $\theta \equiv Arg(Z)[2\pi]$.

Arguments et opérations :

Théorème : Pour tous nombres complexes non nuls Z et Z' on a : $Arg(Z.Z') \equiv Arg(Z) + Arg(Z')[2\pi]$.

Corollaire : Pour tous nombres complexes non nuls Z et Z' on a :

$Arg\left(\dfrac{Z}{Z'}\right) \equiv Arg(Z) - Arg(Z')[2\pi]$; $Arg(Z^n) \equiv n\,Arg(Z)[2\pi] \,;\, n \in \mathbb{N}$.

V / Notation exponentielle :

La notation $e^{i\theta}$:

Définition : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Propriétés : Pour tous $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \,;\, n \in \mathbb{N}$.

Formules de Moivre et d'Euler :

Théorème : * <u>Formule de Moivre</u> : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad et \quad (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) .$$

* <u>Formule d'Euler</u> : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

VI / Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe :

* Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $u \in \mathbb{C}$, on appelle racine $n^{ième}$ de u toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^n = u$.

➢ Si $u = 0$ alors l'équation $Z^n = 0$ admet l'unique solution 0 .

- Si $u = re^{i\theta}; r>0$ alors l'équation $Z^n = 0$ admet n solutions c'est-à-dire u admet exactement n racines $n^{ièmes}$ de la forme : $Z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0;1;2;\cdots;(n-1)\}$.

* Dans le plan complexe les images des racines carrées d'un nombre complexe non nul sont symétriques par rapport à O (origine du repère) .

* Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1;2\}$ les images dans le plan complexes de n racines $n^{ièmes}$ de $u = re^{i\theta}$; $r>0$ sont les sommets d'un polygone régulier de n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

VII / Equations du second degré dans $\mathbb{C}$:

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ou $a \in \mathbb{C}^*$ et $(b;c) \in \mathbb{C}^2$; les solutions de cette équation dans $\mathbb{C}$ sont : $z' = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z'' = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ avec δ est une racine carrée du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

VIII / Linéarisation :

Il s'agit de transformer un produit de type : $\cos^n x$, $\sin^n x$ ou $\cos^n x \cdot \sin^n x$ en une somme de termes de type : $a\cos(\alpha x)$ ou $b\sin(\beta x)$.

IX / Nombres complexes et géométrie :

Dans cette partie le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormée direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

* Colinéarité et orthogonalité :

Théorème : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan $\mathscr{P}$, d'affixes respectives Z et Z' , on a :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \dfrac{Z}{Z'} \in \mathbb{R}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \dfrac{Z}{Z'} \in i\mathbb{R}$.

*** Cocyclicité :**

Théorème : Soit $a;b;c$ et d quatre nombres complexes distincts d'images respectives $A;B;C$ et D on a :

Les points $A;B;C$ et D sont cocycliques ou alignés $\Leftrightarrow \left(\dfrac{a-c}{b-c} : \dfrac{a-d}{b-d}\right) \in \mathbb{R}$.

Théorème :

Transformation	Ecriture complexe Au point $M(Z)$, la transformation associe le point $M'(Z')$
Translation de vecteur $\vec{u}$	$Z' = Z + b$; b affixe de $\vec{u}$
Homothétie de centre Ω et de rapport k	$Z' - \omega = k(Z - \omega)$; ω : affixe de Ω ; $k \in \mathbb{R}^*$
Rotation de centre Ω et d'angle θ	$Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega)$; ω : affixe de Ω ; $\theta \in \mathbb{R}$

Point méthode :

* Somme et différence de deux termes : Pour transformer une telle expression , on peut essayer de faire apparaître un cosinus ou un sinus $(e^{ix} + e^{-ix}$ ou $e^{ix} - e^{-ix})$ pour une factorisation appropriée.

Exemples : • $e^{ix}+1=e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}\right)=e^{i\frac{x}{2}}.2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

• $e^{ix}-e^{i5x}=e^{i\left(\frac{1+5}{2}\right)x}\left(e^{i(-2x)}-e^{i2x}\right)=e^{i3x}\left(-2\sin(2x)\right)$.

*** Module et argument :** *Une expression du type* $re^{i\theta}$ *ne doit pas nous abuser ; il est indispensable de connaître le signe de* r *pour conclure :*

$Z=re^{i\theta}$

- *Si* $r>0$: $|Z|=r$ *et* $Arg(Z)\equiv\theta[2\pi]$
- *Si* $r<0$: $|Z|=-r$ *et* $Arg(Z)\equiv\theta+\pi[2\pi]$

*** Expression de** $\cos(nx)$ ***et*** $\sin(nx)$ ***en fonction de*** $\cos x$ ***et*** $\sin x$ **:**

Le calcul débute par : $\cos(nx)=\mathrm{Re}\left(e^{inx}\right)=\mathrm{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^n\right)=\mathrm{Re}\left((\cos x+i\sin x)^n\right)=\cdots\cdots$

Le scénario se poursuit par le développement de $(\cos x+i\sin x)^n$ *; la partie imaginaire du résultat est* $\sin(nx)$

* *Transformation de* $a\cos x+b\sin x\,;(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

La méthode consiste à écrire $a\cos x+b\sin x=\mathrm{Re}\left[(\cos x+\sin x)(a-ib)\right]$ *puis à utiliser les formes exponentielles pour aboutir à :* $a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\theta)$ *avec* $a+ib=re^{i\theta}$.

Une autre méthode (sûrement moins savante) consiste à factoriser par $\sqrt{a^2+b^2}$.

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$ *et à reconnaître un réel* θ *tel que :* $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *et* $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Une formule d'addition donne alors : $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$.

EXERCICE N°1:

Cocher la réponse juste

* *Soit* Z *un nombre complexe non nul*

- ☐ $\frac{1}{Z}=\frac{\overline{Z}}{|Z|^2}$
- ☐ $|Z|=1\Rightarrow\overline{Z}=\frac{1}{Z}$
- ☐ $|Z|\le|\mathrm{Re}(Z)|$
- ☐ $\forall Z_2\in\mathbb{C},\exists Z_1\in\mathbb{C}/|Z_1+Z_2|=|Z_1|+|Z_2|$
- ☐ $Z\times\overline{Z}\in\mathbb{R}_+$

* *Soient :* $a=2+2i\sqrt{3}$, $b=2-2i\sqrt{3}$, $c=-1+i\sqrt{3}$ *et soient A,B,C les points d'affixes respectives a,b,c*

- [ ] $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)[2\pi]$
- [ ] $\dfrac{a-c}{b-c}=-i\sqrt{3}$
- [ ] $(CA)\perp(CB)$
- [ ] $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
- [ ] *ABC est rectangle en C car* $AB^2=AC^2+BC^2$

* *Soit la suite de complexes* (z_k) *où* $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *où k est un entier quelconque positif ou nul et n est un entier positif fixé supérieur à 2. Enfin* M_k *est l'image de* z_k

- [ ] $\forall k>0,\left(z_k\right)^n=1$
- [ ] $\forall k>0,\overline{z_k}^n=1$
- [ ] $z_0+z_1+z_2+.....+z_{n-1}=0$
- [ ] $\forall k, n-1\geq k\geq 0\Rightarrow\overline{z_k}=z_{n-k}$
- [ ] $M_kM_{k+1}=2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

EXERCICE N°2:

Soient $z_1=\dfrac{a+ib}{a-ib}$ *et* $z_2=\dfrac{a-ib}{a+ib}$ *avec* $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$

Montrer que $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ *et* $z_1-z_2\in i\mathbb{R}$

EXERCICE N°3:

Soient z_1 *et* z_2 *deux nombres complexes tels que* $\begin{cases}|z_1|=|z_2|\\ \text{et}\\ 1+z_1z_2\neq 0\end{cases}$

Montrer que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}$

EXERCICE N°4:

Soient z_1 *et* z_2 *deux nombres complexes.*

Montrer que $|z_1-z_2|=|1-\overline{z_1}z_2|\Leftrightarrow\begin{cases}|z_1|=1\\ \text{et}\\ |z_2|=1\end{cases}$

EXERCICE N°5:

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, *Montrer que :*

1°) $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.

2°) $e^{i\alpha}-e^{i\beta}=2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

EXERCICE N°6:

Soit $Z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1°) Exprimer Z^2 sous forme algébrique.

2°) Exprimer Z^2 sous forme exponentielle.

3°) En déduire Z sous forme exponentielle.

EXERCICE N°7:

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les- points $A(1)$ et $B\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Pour chaque point $M(z)$ du plan on désigne par $M_1(z_1)$,l'image de M par la- rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis par $M'(z')$ l'image de M_1 par la- translation de vecteur $-\vec{u}$.

On note par T la transformation qui à chaque point M associe le point M'.

1°) a- Montrer que $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z-1$

b- Déterminer $T(B)$

c- Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.

2°) On pose $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

a- On prend $z\neq 0$, calculer $Ré\left(\frac{z'}{z}\right)$ en fonction de x et de y .

b- Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan pour que le triangle OMM' soit rectangle en O .

3°) Dans cette question , on pose $z=1+i$

a- Vérifier que $M\in(\Gamma)$ et placer M et M' sur une figure.

b- Calculer $|z'|$ et l'aire du triangle OMM'.

EXERCICE N°8:

On considère le nombre complexe $a=e^{i\frac{2\pi}{5}}$.On note I,A,B,C et D les point du plan complexe d'affixes respectives $1,a,a^2,a^3$ et a^4.

1°) Vérifier que $a^5=1$

2°) Montrer que $IA=AB=BC=CD=DI$.

3°) Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a : $z^5-1=(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$

4°) *En déduire que* $1+a+a^2+a^3+a^4=0$

5°) *Montrer que* $a^3=\overline{a}^2$ *et que* $a^4=\overline{a}$

6°) *En déduire que* $\left(a+\overline{a}\right)^2+a+\overline{a}-1=0$

7°) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $4x^2+2x-1=0$

8°) *Calculer* $a+\overline{a}$ *et en déduire la valeur exacte de* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

9°) *Placer les points* I, A, B, C *et* D *dans le plan complexe (unité* $4\,cm$ *).*

EXERCICE N°9:

On considère un cercle de centre O *et trois points* A, B *et* C *de ce cercle. On désigne par* A', B' *et* C' *les images respectives des points* A, B *et* C *par la rotation de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{3}$.

Soient $D=A'*B$, $E=B'*C$ *et* $F=C'*A$ *, montrer que ces points sont les sommet d'un triangle équilatéral.*

EXERCICE N°10:

Linéariser $\cos^2(5x)\sin(3x)$

EXERCICE N°11:

Soit $(E):\left(\cos^2\theta\right)z^2-2\left(\cos^2\theta\right)z+1=0 \quad ; \theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1°) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E).

On notera z_1 *la solution dont la partie imaginaire est positive et* z_2 *l'autre solution.*

2°) *a- Calculer* z_1+z_2

b- Exprimer en fonction de θ *le module de chaque solution.*

c- En déduire z_1z_2 *puis* $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ *en fonction de* θ.

3°) *a- Calculer* $S=z_1^2+z_2^2$

b- Pour quelle(s) valeur(s) de θ *a-t-on* $S=0$?

EXERCICE N°12:

Soit $P(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1$

1°) *Calculer* $P(1+i)$.

2°) *Comparer* $P\left(\overline{z}\right)$ *et* $\overline{P(z)}$.

3°) *Montrer que si* α *est une racine de* P *, alors* $\overline{\alpha}$ *est une racine de* P .

4°) Montrer que si α est une racine de P, alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est une racine de P.

5°) Déterminer toutes les racines de P.

EXERCICE N°13:

Soit l'équation $(E): z^2 - \alpha z + (1+i)\alpha - 2i = 0 \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{C}$

1°) Montrer qu'il existe une et une seule valeur de α pour la qu'elle l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées.

2°) Résoudre l'équation (E) en utilisant la valeur de α trouvée.

EXERCICE N°14:

1°) a- $\alpha \in \mathbb{R}$; Résoudre l'équation $(\sigma_{\alpha,1}): \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0 \end{cases}$

b-En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :

$(\sigma_{\alpha,n}): \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0 \end{cases}$ *avec n un entier naturel non nul donné.*

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1$

On admet que pour tous z, α et n on a :

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2z\cos\frac{\alpha}{n} + 1\right) \times \cdots \times \left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right] \times \cdots \times \left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right]$$

et on note $P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$

a- Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que : $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$

b- Pour tout $\alpha \in [0, \pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose : $H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on a : $2^{n-1}H_n(\alpha) = \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$.

a- Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} H_n(\alpha)$.

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$: $\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \sin\frac{3\pi}{n} \times \cdots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$