Série d'exercices

Exercice 1 ***Soit g une fonction définie par :*** $g(x)=\begin{cases}\sqrt{4x+1} & ,\textbf{si}\quad x\geqslant 2\\ x^2-2x+3 & ,\textbf{si}\quad x<2\end{cases}$

1. ***Montrer que g est continue sur les deux intervalles $[2;+\infty[$ et $]-\infty;2[$.***
2. ***Montrer que g est continue à gauche en 2.***
3. ***Déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.***

Exercice 2

1. ***Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :***

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & si & x<0\\ x-1 & si & x\geq 0\end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2. ***Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*** $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-2}{x-2} & si & x\neq 2\\ 3 & si & x=2\end{cases}$
Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
3. ***Quelle valeur de a faut-il choisir pour que la fonction définie par :***

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & si & x\in[-1;0[\cup]0;+\infty[\\ a & si & x=0\end{cases}$$

soit continue en 0 ?

Exercice 3 ***Soit g une fonction définie par :*** $g(x)=\begin{cases}\sqrt{4x+1} & ,\textbf{si}\quad x\geqslant 2\\ x^2-2x+3 & ,\textbf{si}\quad x<2\end{cases}$

1. ***Montrer que g est continue sur les deux intervalles $[2;+\infty[$ et $]-\infty;2[$.***
2. ***Montrer que g est continue à gauche en 2.***
3. ***Déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.***

Exercice 4 ***Soit f une fonction définie par :*** $\begin{cases}f(x)=\frac{x^3+x^2-5x-2}{x-2} & \textbf{si}\quad x\neq 2\\ f(2)=a & ,a\in\mathbb{R}\end{cases}$

1. ***Montrer que :*** $x^3+x^2-5x-2=(x-2)(x^2+3x+1)$.
2. ***Calculer*** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.
3. ***Déterminer la valeur de a sachant que f est continue en 2.***

Exercice 5 ***Étudier la continuité de la fonction f en $x_0=1$ dans les cas suivants :***

1. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4(x^2+x-2)}{3\sqrt{1-x}} & \textbf{si } x<1,\\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \textbf{si } x>1,\\ 0 & \textbf{si } x=1.\end{cases}$$
2. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1} & \textbf{si } x>1,\\ \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} & \textbf{si } x<1,\\ 2 & \textbf{si } x=1.\end{cases}$$

Exercice 6 ***Soit f la fonction définie sur*** $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ ***par :*** $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}, & \textbf{si ;}\quad x<3\\ f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}, & \textbf{si ;}\quad x>3\end{cases}$

La fonction f est elle prolongeable par continuité en 3 ?

Exercice 7 ***Soit f la fonction définie par :*** $\begin{cases}f(x)=x+\sqrt{x^2+1}, & \textbf{si ;}\quad x\leq 0\\ f(x)=\dfrac{2-2\cos x}{x^2}, & \textbf{si ;}\quad x>0\end{cases}$

1. ***Étudier la continuité de f en 0.***
2. ***Montrer que pour tout $x>0$;$0\leq f(x)\leq\dfrac{4}{x^2}$; en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.***
3. ***Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.***

Exercice 8 ***Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*** $f(x)=2ax^2+5$ ***si*** $x<2$ ***et*** $f(x)=2x-1$ ***si*** $x>2$.
Déterminer a pour que f soit continue en 2.

Exercice 9

1. ***On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x}$***
   (a) ***Étudier la dérivabilité de f en 0.***

(b) ***Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f admet-elle une tangente au point d'abscisse 0.***

2. ***On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x^2\sqrt{x}$***

   (a) ***Étudier la dérivabilité de g en 0.***

   (b) ***Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de g admet-elle une tangente au point d'abscisse 0.***

Exercice 10 ***On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par***

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & si \quad x < 1 \\ \frac{1}{x} & si \quad x \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

1. ***Démontrer que f est continue en 1.***
2. ***Démontrer que f n ?est pas dérivable en 1.***

Exercice 11 ***On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :***

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x - x^2 & si \quad x < 1 \\ -x + 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \tag{2}$$

Etudier la continuité, puis la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 ***On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par***

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 6x - 5 & si \quad x < 1 \\ \frac{b}{x} & si \quad x \geq 1 \end{cases} \tag{3}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable en 1.

Exercice 13 ***On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1.5\}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2x-3}$.***

1. ***Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1.***
2. ***Existe-t-il un autre point de la courbe de f pour lequel la tangente à la courbe est parallèle à T ? Si oui, déterminer ses coordonnées et l'équation de cette seconde tangente.***

Exercice 14 ***On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 9x + 6$. Existe-t-il des tangentes à la courbe représentative de f, parallèles à la droite d'équation $y = -4x + \sqrt{2}$?***

Exercice 15 ***On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :***

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq -2 \\ -x & si \quad -2 < x \leq -1 \\ x^2 & si \quad -1 < x \leq 0 \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases} \quad x$$

1. ***Étude de f en -2 :***
   (a) ***Étudier les limites de f en -2 à gauche et à droite.***
   (b) ***La fonction f est-elle continue en -2?***
2. ***Étude de f en -1 :***
   (a) ***Démontrer que la fonction f est continue en -1.***
   (b) ***Étudier les limites, lorsque x tend vers -1, à gauche puis à droite de $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$***
   (c) ***La fonction f est-elle dérivable en -1?***
3. ***Étude de f en 0 : Démontrer que la fonction f est dérivable en 0.***