Lycée Hammam Sousse 1 Date: 6/12/2020	Correction du devoir de contrôle N°:1	Classe: 3_{Sc} Durée: 2H

Excercice 1: (2 points)

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-|x|}$

   f(x) est définie $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - |x| \neq 0 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

   D'où $D_f = [0, +\infty[\backslash\{1\}$

   la bonne réponse est (F).

2. ABC est un triangle quelconque.

   $M \in P$ tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC}$

   $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB} = 0$

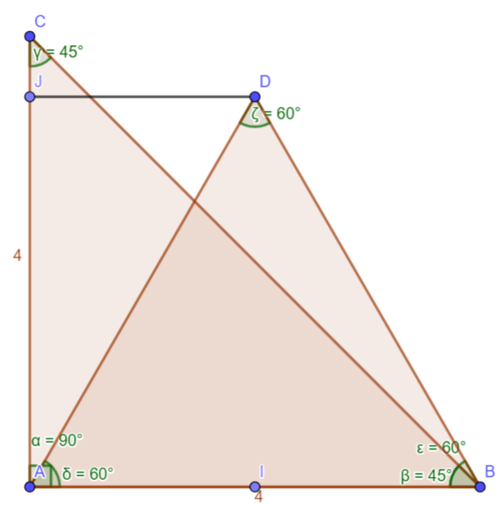
   $\Leftrightarrow M \in$ à la droite $\perp$ à (BC) et passant par A

   $\Leftrightarrow M \in$ à la hauteur issue de A dans le triangle ABC

   la bonne réponse est (V)

Excercice 2: (6.50 points)

ABC est un triangle rectangle et isocéle en A; ABD et un triangle équilatéral; $I = A * B$; J le projeté orthogonal de D sur AC). On pose $AB = 4$



1. a) $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA} = BD \times BA \times \cos(\widehat{DBA})$

$= 4 \times 4 \times \cos(\frac{\pi}{3})$

$= 16 \times \frac{1}{2} = 8$

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AC} = \underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}}_{0} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

$= AD \times AC \times \cos(\widehat{DAC})$

$= 4 \times 4 \times \cos\frac{\pi}{6}$

$= 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

b) $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}\ = 8 + 8\sqrt{3} = 8(1+\sqrt{3})$

c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BC}\ = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\ = 8(1+\sqrt{3}) - BA \times BC \times \cos(\underbrace{\widehat{CBA}}_{\frac{\pi}{4}})$

$= 8(1+\sqrt{3}) - 4 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 8(1+\sqrt{3}) - 16 = 8(\sqrt{3}-1)$

2. $\widehat{DBC} = \widehat{DBA} - \widehat{CBA}$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ (rd)

3. $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = BD \times BC \times \cos(\widehat{CBD})\ = 4 \times 4\sqrt{2} \times \cos(\frac{\pi}{12})\ = 16\sqrt{2}.\cos(\frac{\pi}{12})$

or $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = 8(1+\sqrt{3})$

D'où $16\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{12}) = 8(1+\sqrt{3}) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{8(1+\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

4. $R = (A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}); \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{i}; \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{j}$

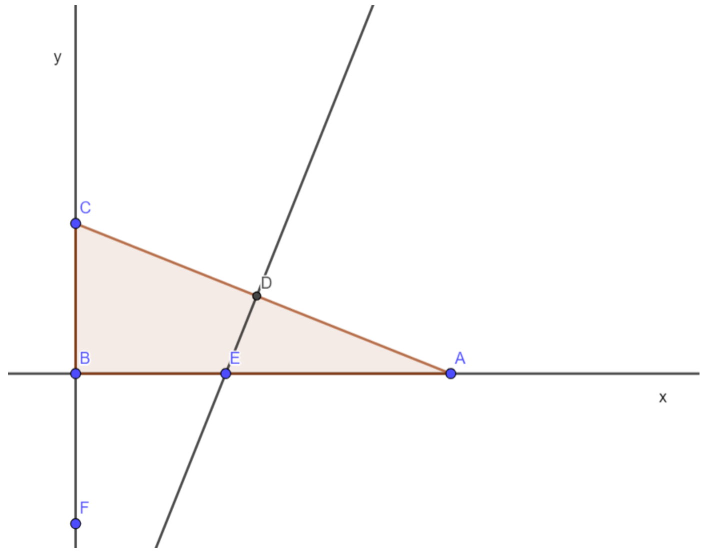
a)
- $B(4;0)$
- $D(2;2\sqrt{3})$ car $y_D = y_J$ et $\frac{AJ}{AD} = \cos(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow AJ = AD \times \cos(\frac{\pi}{6}) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$
- $C(0;4)$

b) ona: $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} = (-2)\times(-4) + 2\sqrt{3}\times 4 = 8 + 8\sqrt{3} = 8(1+\sqrt{3})$; anisi on retrouve les résultats de $1)b)$

Excercice 3: (8.50 points)

A) ABC est rectangle en B tel que $AB = 5$ et $BC = 2$; $F \in [AB]$ tel que $AE = 3$; D : projeté orthogonal de E sur (AC) et $F = S_B(C)$



1. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}$ car B est le projeté orthogonal de C sur (AE)

   $= AE \times AB = 5 \times 3 = 15$

   or $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ car D est le projeté orthogonal de E sur (AC)

   D'où $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = AC \times AD$

   $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25 + 4 = 29 \Rightarrow AC = \sqrt{29}$

   Ainsi $\sqrt{29} \times AD = 15 \Rightarrow AD = \frac{15}{\sqrt{29}}$

2. a) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ car B est le projeté orthogonal de F sur (AB)

   $= AB^2 = 25$

   $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FB}$ car B est le projeté orthogonal de A sur (FB)

   $= -FB^2 = -4$

   D'où $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC} = 25 - 4 = 21$

   b) $\cos(\widehat{CAF}) = \frac{\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}}{AF \times AC} = \frac{21}{\sqrt{29}\times\sqrt{29}}$; $AF^2 = AB^2 + FB^2 = 25 + 4 = 29 \Rightarrow AF = \sqrt{29}$

   $= \frac{21}{29}$

B) $\Delta = \{M \in P$ tel que : $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}\}$

$\mathscr{C} = \{M \in P$ tel que : $2.MA^2 + 3MB^2 = 50\}$

1. $\begin{cases} \text{AE=3} \\ \text{BE=2} \end{cases}$ $\Rightarrow 2AE = 3BE$ et ($\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires et de sens contraires)

   $\Rightarrow 2\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{BE} \Rightarrow 2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0} \Rightarrow$ E est le barycentre des points pondéres $(A;2)$ $(B;3)$

2. a) $M \in \Delta \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}$

   $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = 0$

   $\overrightarrow{AC}.(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.(5\overrightarrow{ME}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{AC} = 0$

   b) $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{AC} = 0$

   D'où Δ est la droite $\perp$ à la droite (AC) passant par E donc $\Delta = (DE)$

3. a) $M \in P$; $2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + 3(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2$

   $= 5\overrightarrow{ME}^2 + 2\overrightarrow{EA}^2 + 3\overrightarrow{EB}^2 + 4\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EA} + 6\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EB}$

   $= 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2 + 2\overrightarrow{ME}.(\underbrace{2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB}}_{\overrightarrow{0}})$

   $= 5ME^2 + 18 + 12 = 5ME^2 + 30$

   b) $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow 2ME^2 + 3MB^2 = 50 \Leftrightarrow 5ME^2 + 30 = 50 \Leftrightarrow 5ME^2 = 20 \Leftrightarrow ME^2 = 4 \Leftrightarrow ME = 2$

   D'où $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{(E;2)}$

C) $R = (B; \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}; \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$

(a) $A(5;0)$; $C(0;2)$; $E(2;0)$; $F(0;-2)$

(b) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB} = -5 \times -5 + -2 \times 0 = 25$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC} = -5 \times 0 + -2 \times 2 = -4$

D'où $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC} = 25 - 4 = 21$

Excercice 4: (3 points)

$x > 1$; $f(x) = x^2 - 3 - \frac{1}{x-1}$

1. $h(x) = x^2 - 3$; $g(x) = \frac{1}{x-1}$; $x > 1$

   $1 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2 \Rightarrow a^2 - 3 < b^2 - 3 \Rightarrow h(a) < h(b) \Rightarrow$ h est strictement $\nearrow sur$]1;+∞[

   $1 < a < b \Rightarrow 0 < a - 1 < b - 1 \Rightarrow \frac{1}{a-1} > \frac{1}{b-1} \Rightarrow g(a) > g(b) \Rightarrow$ g est strictement $\searrow sur$]1;+∞[

   on a: $f(x) = h(x) - g(x)$

   $1 < a < b \quad f(a) - f(b) = h(a) - g(a) - [h(b) - g(b)] = [\underbrace{h(a) - h(b)}_{<0}] - [\underbrace{g(a) - g(b)}_{>0}] < 0$

   D'où $f(a) < f(b)$

   d'où f est strictement $\nearrow sur$]1;+∞[

2. $x \in \mathbb{R}$; $\mathrm{P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2}$

   a) $x > 1 \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 - \frac{1}{x-1} = 0$

   $\Leftrightarrow \frac{(x^2-3)(x-1)-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$

   b) On a : $P(2) = 0 \Rightarrow P(x) = (x-2)Q(x)$ avec $d^0(Q) = 2$

   d'où $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ avec a, b et c $\in \mathbb{R}$

   c) $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$

   D'où $\begin{cases} \text{a=1} \\ \text{b-2a=-1} \\ \text{c-2b=-3} \\ \text{-2c=2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{a=1} \\ \text{b=1} \\ \text{c=-1} \end{cases}$

   D'où $P(x) = (x-2)(x^2 + x - 1)$

   d) $M(x; y) \in \mathscr{C}_h \cap \mathscr{C}_g \Leftrightarrow x > 1 \; et \; h(x) = g(x)$

   $\Leftrightarrow x > 1$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $P(x) = 0$

   $x^2 + x - 1 = 0$

   $\Delta = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} \text{x'= } (-1+\sqrt{5}) \times \frac{1}{2} < 1 \\ \text{x"= } (-1-\sqrt{5}) \times \frac{1}{2} < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \{2\}$

   Donc $\mathscr{C}_h \cap \mathscr{C}_g = \{A(2; 1)\}$

$M(x;y) \in \mathscr{C} \cap (ox) \Leftrightarrow x > 1\ ;\ y = 0$ et $y = f(x)$

$\Leftrightarrow x > 1$ et $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x > 1$ et $x = 2$

D'où $\mathscr{C} \cap (ox) = \{B(2;0)\}$

Barême:

EX1:
1) 1 point
2) 1 point

EX2:
1)
$a)$ 0.5 point + 1 point
$b)$ 1 point
$c)$ 1 point
2) 0.5 point
3) 1 point 4)
$a)$ 0.25 point + 0.5 point + 0.25 point
$b)$ 0.5 point

EX3:
$A)$
1) 0.5 point + figure 0.5 point + 0.75 point
2)
$a)$ 0.5 point + 0.5 point + 0.5 point
$b)$ 0.5 point

$B)$
1) 0.5 point
2)) $a)$ 0.5 point
$b)$ 0.5 point
3)
a) 0.75 point
b) 0.5 point
C)
1) 0.5 point
2) 0.5 point + 0.5 point + 0.5 point

EX4:
1) 0.5 point + 0.5 point + 0.5 point
2)
a) 0.5 point
b) 0.5 point
c) 1 point
d) 0.5 point + 0.5 point