DEVOIR CONTROLE 2.

2016/2017

4°sc. T E C H.

S M A A L I.

EXERCICE N°1.

f désigne une fonction deux fois dérivable sur $[-3\ ;\ 1]$.

$f\,'$ et $f\,''$ désignent respectivement sa dérivée première et sa dérivée seconde telle que le tableau de variation de $f\,'$ est le suivant :

x	-3	0	1
$f'(x)$	-1 ↗	0	↘ -2

Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé passe par les points $A(-3\ ;\ 2)$ $B(0\ ;\ -1)$ et $C(1\ ;\ -2)$

1) a) Donner le tableau de variation de f

b) Ecrire une équation de la demi tangente à (Γ) au point C.

c) Tracer une allure de (Γ)

2) Répondre par **Vrai** ou **Faux** en justifiant la réponse

a) Le point B est un point d'inflexion pour (Γ).

b) La courbe (Γ) admet deux tangentes parallèles à la droite Δ: $y = -\frac{1}{2}x$

c) $\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)+1\right| \leq 1$

3) Calculer $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{f(\cos x)+1}{x-\frac{\pi}{2}}$

EXERCICE N°2.

Soit f la fonction définie sur $[-\pi, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x - \cos x + 1 & si\ -\pi \leq x < 0 \\ (x-3)\sqrt{x} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0. Interpréter graphiquement ces résultats.

4)a) calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $[-\pi,0[$ et $]0,+\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de f.

5) Etudier la nature de la branche infinie de Γ au voisinage de $+\infty$.

6) Montrer que la courbe Γ admet sur $[-\pi,0[$ un point d'inflexion qu'on déterminera.

EXERCICE N°3.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}. \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1) a/ Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

b/ Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c/ Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

2) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $V_n = \dfrac{u_n}{n}$

a/ Montrer que la suite (V_n) est géométrique, que l'on précisera.

b/ En déduire que, pour tout entier naturel n non nul ; $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

EXERCICE N°4.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (3-i)z + 4 = 0$.

1)a)Calculer $(1-3i)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).On note z_1 et z_2 les solutions / $\operatorname{Im}(z_1) > 0$

c)Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : z^3 + (2i-3)z^2 + (3-3i)z + 4i = 0.$

a)Vérifier que $z_0 = -i$ est une solution de(E').

b) Déterminer les nombres complexes a et b tel que $\forall x \in \mathbb{C}$ on a :

$z^3 + (2i-3)z^2 + (3-3i)z + 4i = (z - z_0)(z^2 + az + b).$

c)Résoudre alors l'équation(E').

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = 2-2i$ et $z_C = -i$.

Déterminer la nature du triangle ABC