Épreuve : Mathématiques

Durée : 2H

Devoir de contrôle n°4

$3^{ème}$ Sciences technique 1

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{3+U_n^2}}.$$

1) a) Calculer U_1 et U_2.

b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $0 < U_n \leq 1$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$.

d) En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

2) Soit V_n la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n^2}{2+U_n^2}$.

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

c) Exprimer V_n et puis U_n en fonction de n.

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et puis $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 2

Considérons la suite réelle (u_n) définie pour :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 2.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

a) $u_n = 3^n + 1$.

b) u_{4n+2} est divisible par 10.

Exercice 3

Soient les nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 - i$.

1) Ecrire a et b sous forme trigonométrique.

2) On pose $z = \frac{a}{b}$.

a) Donner la forme algébrique de z.

b) Donner la forme trigonométrique de z.

c) Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M, d'affixe z distincte de $2i$, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+i}{z-2i}$.

1) Pour $z \neq 2i$, on pose $|z-2i| = r$ et $\arg(z-2i) = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier que $z'-1 = \frac{3i}{z-2i}$.

b) En déduire la forme trigonométrique de $z'-1$.

2) Soient A et B les points d'affixes respéctives $2i$ et 1.

a) Vérifier que $AM \bullet BM' = 3$.

b) En déduire l'ensemble des points M pour lesquels $|z'-1| = 3$.

c) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels $\arg(z'-1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$