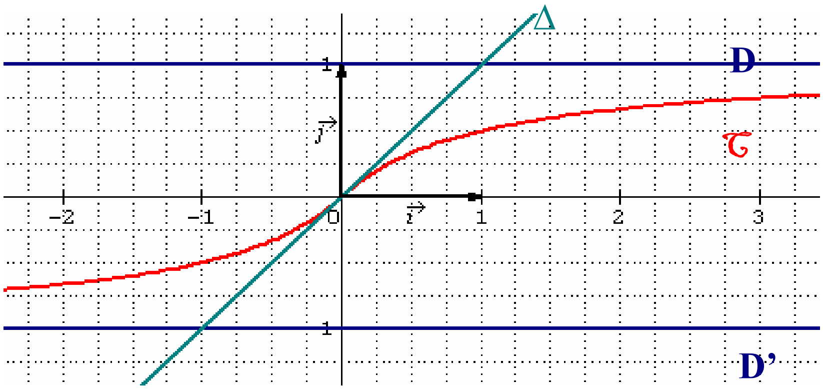
ENONCE

Exercice 1

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction g dérivable sur R, D et D' sont les asymptotes de $\mathcal{C}$ et Δ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



1) Calculer $g'(0)$.
2) Dresser le tableau de variation de g
3) La fonction g précédente est la fonction réciproque d'une fonction f.
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(0)$
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Tracer, dans le même repère, la courbe Γ de f.

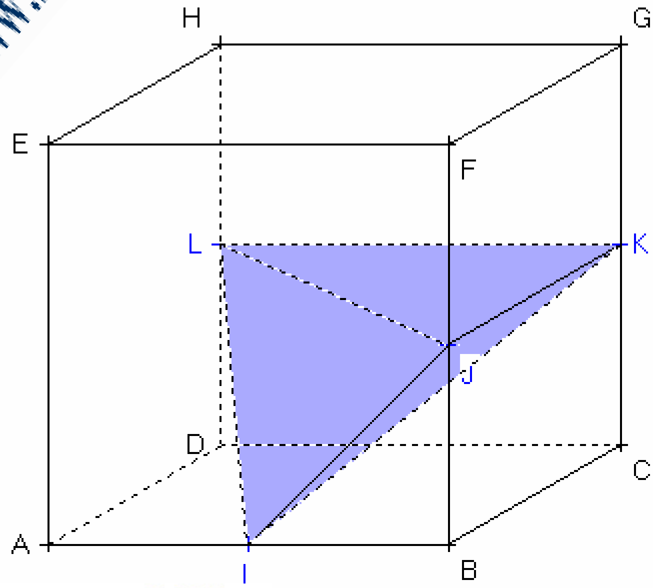
Exercice 2

Soit U et V les suites définies sur N par $\begin{cases} U_0 = 1 \text{ et } U_1 = \frac{5}{4} \\ U_{n+1} = \frac{5}{4}U_n - \frac{1}{4}U_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$ et $V_n = U_{n+1} - U_n$

1) Montrer que V est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
2) En déduire le sens de variation de U.
3) En déduire U_n en fonction de n.
4) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$
5) Soit S la suite définie sur N par $S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p$
a) Expliciter S_n.
b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 3

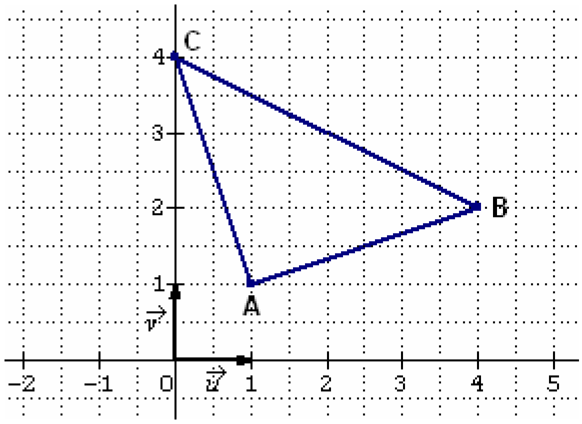
ABCDEFGH est un cube, I, l, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [DH], [BF] et [CG] comme indique la figure ci-contre :



On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
1) Lire les coordonnées des points I, J, L et K.
2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JL}, \overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI} \wedge \overrightarrow{JL}$
3) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JL}$
4) Calculer le volume du tétraèdre IJKL.
5) Calculer l'aire du triangle IJL.
6) En déduire la distance de K au plan (IJL).

Exercice 4

Dans la plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on donne le triangle ABC comme indique la figure ci-contre :



1) Déterminer graphiquement les affixes des points A, B et C.

2) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ et calculer son module.

3) En déduire la nature du triangle ABC.

4) Soit I le point d'affixe 2 + 3i.

a) Montrer que I est le milieu du segment [BC].

b) Calculer IA

5) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M(z) tels que $|z-2-3i| = \sqrt{5}$.

Exercice 5

Soi F la fonction définie par $F(x) = \int_0^{\ln(|x|)} \dfrac{dt}{2+\sin(t)}$.

1) Déterminer le domaine de définition D de F.

2) Montrer que F est une fonction paire.

3) a) Montrer que si $0 < x < 1$ alors $F(x) \leq \dfrac{\ln(x)}{3}$

b) En déduire $\lim\limits_{0^+} F$

4) a) Montrer que si $x > 1$ alors $\dfrac{\ln(x)}{3} \leq F(x) \leq \ln(x)$

b) En déduire $\lim\limits_{+\infty} F$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

5) Montrer que F est dérivable sur D et déterminer sa fonction dérivée F'.

6) Dresser alors le tableau de variation de F.

7) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ de F dans un repère orthogonal.

CORRIGE

Exercice 1

1) On sait que, dans un repère orthogonal, le nombre dérivé de g en 0 est la pente de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 0 donc $g'(0) = 1$.

2) Par simple lecture graphique on a :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	-1 $\nearrow$ 1

3) a) D'après le tableau de variation de g on a $D_f =]-1,1[$.

b) Par lecture graphique on constate que $\mathcal{C}$ n'a pas de tangente horizontale donc la courbe de f n'a pas de tangente verticale donc f est dérivable sur]-1,1[.

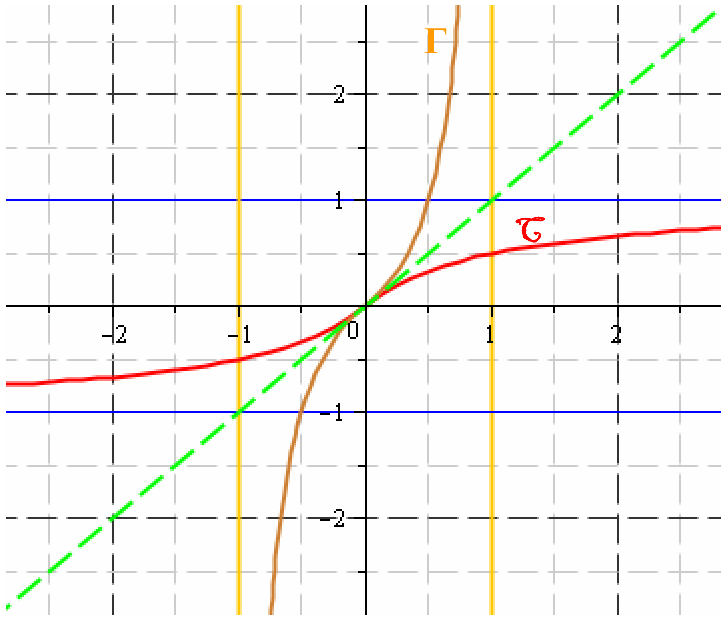
Puisque Δ est une tangente commune de la courbe de f et celle de g alors $f'(0) = 1$.

c) On sait que f et g ont le même sens de variation d'où :

:

x	-1 $\qquad$ 1
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

d)



Exercice 2

1) $V_{n+1}=U_{n+2}-U_{n+1}=\frac{5}{4}U_{n+1}-\frac{1}{4}U_n-U_{n+1}=\frac{1}{4}(U_{n+1}-U_n)=\frac{1}{4}V_n$ donc V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$.

2) On a $U_{n+1}-U_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}>0$ donc U est strictement croissante.

3) On a $U_1-U_0=\frac{1}{4}$

$U_2-U_1=\left(\frac{1}{4}\right)^2$

……………………

$U_n-U_{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

En additionnant membre à membre ces égalités on obtient : $U_n=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$ d'où

$U_n=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

4) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\frac{4}{3}$

5) a) $S_n=\sum\limits_{p=0}^{n}\left[\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^p\right]=\left(\underbrace{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{4}{3}}_{(n+1)\text{ termes}}\right)-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\frac{4n}{3}+\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

b) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4n}{3}+\frac{8}{9}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$

Exercice 3

1) $I\left(\frac{1}{2},0,0\right), J\left(1,0,\frac{1}{2}\right), L\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ et $K\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$

2) $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JI}\wedge\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JL} = 0\times(-1)+1\times1+0\times0 = 1$

4) Soit V le volume de IJKL alors $V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{JI}\wedge\overrightarrow{JL}).\overrightarrow{JK}\right| = \frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{12}$

5) Soit S l'aire du triangle IJL alors $S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{JI}\wedge\overrightarrow{JL}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

6) Soit d la distance de K au plan (IJL) alors $V = \frac{1}{3}d\times S$ d'où $d = \frac{3V}{S} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4}\times\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 4

1) $z_A = 1+i, z_B = 4+2i$ et $z_C = 4i$

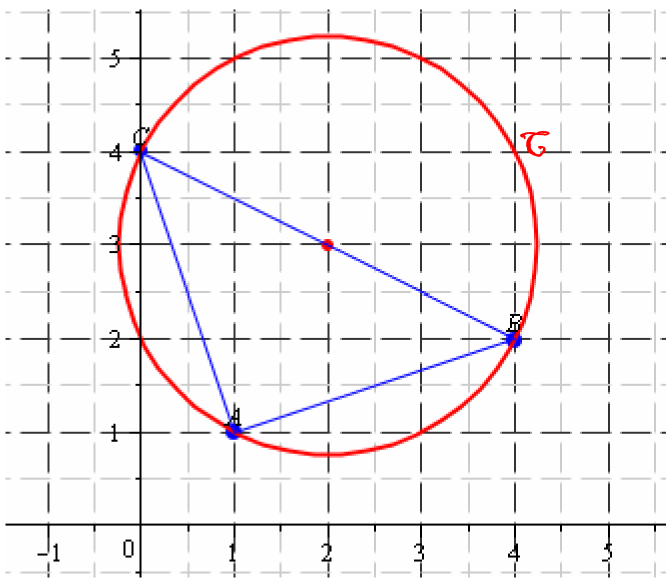
2) $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4+2i-1-i}{4i-1-i} = \frac{3+i}{-1+3i} = \frac{(3+i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-10i}{10} = -i$ donc $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1$

3) On a $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} \in iR \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ de plus AB = AC donc le triangle est rectangle et isocèle de sommet principal A.

4) a) On a $\frac{z_B + z_C}{2} = \frac{4+2i+4i}{2} = 2+3i = z_I$ donc I est le milieu du segment [BC].

b) $IA = |z_A - z_I| = |1+i-2-3i| = |-1-2i| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

5) $M(z)\in\mathcal{C} \Leftrightarrow |z-2-3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z_M - z_I| = \sqrt{5} \Leftrightarrow IM = IA \Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre I et de rayon IA donc $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.



Exercice 5

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2+\sin t)}$ est continue sur R donc la fonction U définie sur R par $U(x)=\int_0^x \dfrac{dt}{2+\sin(t)}$ est sa seule primitive qui s'annule en 0.On donc $F(x) = U[\ln(|x|)]$ et comme la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est définie sur R* alors $D_F = R^*$.

2) ☻ Puisque $D_F = R^*$. alors $x \in D_F \Leftrightarrow (-x) \in D_F$.

☻ $F(-x) = \int_0^{\ln(|-x|)} \dfrac{dt}{2+\sin(t)} = \int_0^{\ln(|x|)} \dfrac{dt}{2+\sin(t)} = F(x)$ donc f est paire.

3) a) Soit x un réel de$]0,1[$alors $\ln(|x|) = \ln(x) < 0$.

On sait que pour tout réel t,$-1 \le \sin(t) \le 1$ donc $1 \le 2+\sin(t) \le 3$ donc $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2+\sin(t)} \le 1$ donc

$\int_{\ln(x)}^0 \dfrac{dt}{3} \le \int_{\ln(x)}^0 \dfrac{dt}{2+\sin(t)} \le \int_{\ln(x)}^0$ dt donc $-\dfrac{\ln(x)}{3} \le -F(x) \le -\ln(x)$ donc $F(x) \le \dfrac{\ln(x)}{3}$

b) on a $\begin{cases} F(x) \le \dfrac{\ln(x)}{3} \text{ pour tout } x \in]0,1[\\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{3} = -\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{0^+} F = -\infty$

4) a) Soit x un réel de$]1,+\infty[$donc $\ln(|x|) = \ln(x) > 0$.

On sait que pour tout réel t, $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2+\sin(t)} \le 1$ donc $\int_0^{\ln(x)} \dfrac{dt}{3} \le \int_0^{\ln(x)} \dfrac{dt}{2+\sin(t)} \le \int_0^{\ln(x)}$ dt donc $\dfrac{\ln(x)}{3} \le F(x) \le \ln(x)$

b) On a $\begin{cases} F(x) \ge \dfrac{\ln(x)}{3} \text{ pour tout } x > 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{3} = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{+\infty} F = +\infty$

c) D'après ce qui précède on a $\dfrac{\ln(x)}{3} \le F(x) \le \ln(x)$ pour tout x > 1 donc pour tout x > 1 on a

$\dfrac{\ln(x)}{3x} \le \dfrac{F(x)}{x} \le \dfrac{\ln(x)}{x}$ on a donc $\begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{3x} \le \dfrac{F(x)}{x} \le \dfrac{\ln(x)}{x} \text{ pour } x > 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{3x} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0$ donc la courbe de F admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

5) On a dit que $F(x) = U[\ln(|x|)]$ or la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est dérivable sur R* et U est dérivable sur R donc F est dérivable sur R* et on a $F'(x) = \dfrac{1}{x} U'[\ln(|x|)] = \dfrac{1}{x(2+\sin[\ln(|x|)])}$

6)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$	−	‖	+
$F(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

7)