Lycée : Echebbi Tadhaman	**Devoir de contrôle N°3**	**Prof : OUERGHI CHOKRI**
Année scolaire : 2015/2016		Epreuve : MATHEMATIQUES
Classe: 4éme Technique 3		Durée :120mn

Exercice 1 (6 pts)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses est exacte.

Ecrire sur la copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la bonne réponse (Aucune justification n'est demandée)

1) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est :

a) $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ b) $x \mapsto \ln(x^2+1)$ c) $x \mapsto 2\ln(x^2+1)$

2) La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = lnx - x$

a) Croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ b) Décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ c) N'est pas monotone sur $\mathbb{R}_+^*$

3) $\lim_{x \to 1} \frac{lnx - x + 1}{x-1}$ égale à

a) 0 b) 2 c) 1

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(e^x+1)}{x}$ égale à

a) 0 b) $+\infty$ c) 1

5) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ égale à

a) 0 b) $+\infty$ c) 2

6) $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x}$ égale à

a) 0 b) $+\infty$ c) 1

Exercice 2 (8 pts)

1°) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{-1}{2}x}$

a) Calculer : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement les résultats

2°) Déterminer les coordonnées des points E et F intersection de $\mathcal{C}f$ la courbe représentative de la fonction f avec respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

3°) a) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $f'(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

4°) Montrer que $\mathcal{C}f$ admet un point d'inflexion K dont on déterminera les coordonnées

5°) Déterminer l'équation de la tangente au point E

6°) Tracer dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ $\mathcal{C}f$ la courbe représentative de la fonction f

Exercice 3 (6 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormée directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit la sphère (S) d'équation (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $\mathcal{P}$: $x + 2y + z - 6 = 0$

1°) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

b) Montrer que la sphère (S) et le plan $\mathcal{P}$ se coupe suivant un cercle (C)

c) Déterminer l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le centre de la sphère (S) et perpendiculaire à $\mathcal{P}$

d) Déduire le rayon et les coordonnées du point T le centre du cercle (C)

2°) On désigne par : A $(2;0;2)$ et B $(2;2;0)$

a) Vérifier que $A \in (S)$ et $A \notin \mathcal{P}$

b) Montrer que $B \in (C)$

3°) a) Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tel que MA = MB

Montrer que $\mathcal{Q}$ est le plan d'équation $\mathcal{Q}$: y = z

b) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupe suivant la droite Δ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 6 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Correction du devoir de contrôle N°3

Exercice 1 (6 pts)

1°) $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \frac{x}{x^2+1}$ la réponse (a) [1]

2°) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$; $f'(x) > 0$ $si\ x < 1$ et $f'(x) < 0$ $si\ x > 1$ la réponse (c) [1]

3°) $\lim_{x\to1} \frac{lnx - x+1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{lnx - ln1}{x-1} + \lim_{x\to1} \frac{-x+1}{x-1} = 1 + (-1) = 0$ la réponse (a) [1]

4°) On pose $t = e^x$ $éq.\ x = t$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(e^x+1)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{ln(t+1)}{lnt} = \lim_{t\to+\infty} \frac{ln\left[t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]}{lnt}$

$= \lim_{t\to+\infty} \frac{lnt + ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{lnt} = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{lnt}{lnt} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{lnt}\right] = 1 + \lim_{t\to+\infty} \left[ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \times \frac{1}{lnt}\right] = 1 + 0 \times 0 = 1$ la réponse (c) [1]

5°) $\lim_{x\to0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 - e^{-x} + 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{(e^x-1) - (e^{-x}-1)}{x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{e^x - e^0}{x-0} - \lim_{x\to0} \frac{e^{-x} - e^0}{x-0} = 1 - (-1) = 2$ la réponse (c) [1]

6°) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$ la réponse (b) [1]

Exercice 2 (8 pts)

1°) a) $*\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^{\frac{-1}{2}x} = \lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{-1}{2}x} + 2e^{\frac{-1}{2}x}$

On pose $t = \frac{1}{2}x$ $éq.\ x = 2t$; $\lim_{t\to+\infty} (2te^{-t} + 2e^{-t}) = \lim_{t\to+\infty} \left(2\frac{t}{e^t} + 2e^{-t}\right)$

$= \lim_{t\to+\infty} \left(2\frac{1}{\frac{e^t}{t}} + 2e^{-t}\right) = 2 \times \frac{1}{+\infty} + 2 \times 0 = 0$ [1]

$*\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{\frac{-1}{2}x} = -\infty \times +\infty = -\infty$ [0,5]

$*\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+2)}{x} e^{\frac{-1}{2}x} = 1 \times +\infty = +\infty$ [0,5]

1°) b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ Donc : la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}f$ [0,5]

$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$ Donc $\mathcal{C}f$ admet une branche parabolique de direction (oj) au voisinage de $-\infty$ [0,5]

2°) $f(0) = (0+2)e^0 = 2$ $donc$ $F(0\,;2)$ [0,5]

$f(x) = (x+2)e^{\frac{-1}{2}x} = 0$ $éq.\ x+2 = 0$ $éq.\ x = -2$ $donc$ $E(-2\,;\,0)$ [0,5]

3°) a) $x \mapsto x+2$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto e^{\frac{-1}{2}x}$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc f donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant produit de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ [0,5]

b) Pour $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = e^{\frac{-1}{2}x} + (x+2)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{-1}{2}x} = e^{\frac{-1}{2}x}\left(1 - \frac{(x+2)}{2}\right) = \frac{-x}{2}\, e^{\frac{-1}{2}x}$ [0,75]

c) $f'(x) = 0$ éq. $x = 0$ [0,5]

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

4°) $x \mapsto \frac{-x}{2}$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; $x \longmapsto e^{\frac{-1}{2}x}$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ [1]

Donc f' donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant produit de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$

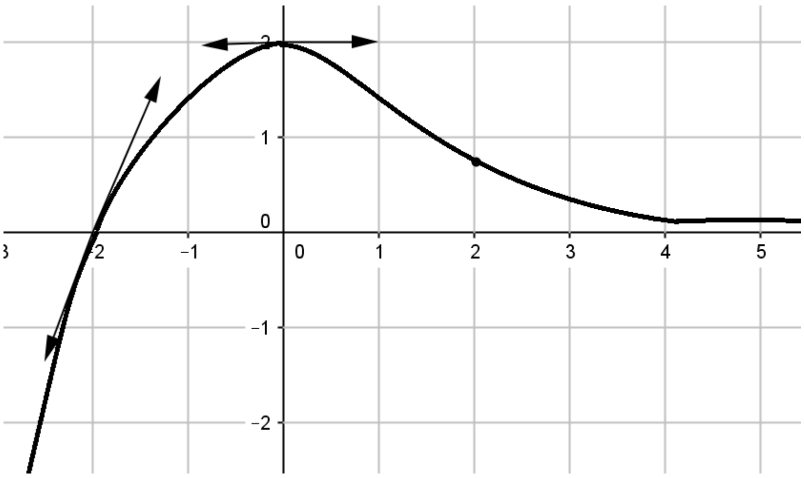
Et Pour $x \in \mathbb{R}$; $f''(x) = \frac{-1}{2}\, e^{\frac{-1}{2}x} + \frac{x}{4}\, e^{\frac{-1}{2}x} = \frac{-1}{2}\, e^{\frac{-1}{2}x}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$) $f''(x) = 0$ éq. $x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	

d'où K(2 ; $4e^{-1}$) est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}f$

5°) $y = (x+2)f'(-2) + f(-2) = (x+2)(e) = e\,x + 2e$ [0, 5]

6°)



[0,75]

Exercice 3 (6 pts)

1°) a) (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$ éq. $x^2 + y^2 + z^2 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$ d'où (S) est une sphère de centre O(0,0,0) et de rayon R= $2\sqrt{2}$ [0,75]

b) $d(O\,,\mathbf{P}) = \frac{|1\times0+2\times0+1\times0-6\,|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 2\sqrt{2}$ d'où (S) et $\mathcal{P}$ se coupe suivant un cercle de rayon r

$r = \sqrt{8-6} = \sqrt{2}$ et de centre est le projeté de O sur $\mathcal{P}$ [0,75]

c) $\boldsymbol{D} = (O, \overrightarrow{n_P})$ avec O (0 , 0 , 0) et $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{D} : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ [0, 5]

d) T(x, y, z) $\in D \cap P$ éq. $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \\ x + 2y + z - 6 = 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ éq. $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \\ 6\alpha - 6 = 0 \end{cases}$ éq. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$ donc T(1 , 2 , 1) [1]

Or $OT = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ d'où $r = \sqrt{R^2 - OT^2} = \sqrt{8-6} = \sqrt{2}$

2°) a) $2^2 + 0^2 + 2^2 - 8 = 0$ donc $A \in (\mathcal{S})$ et $2 + 0 + 2 - 6 = -2 \neq 0$ donc $A \notin \mathcal{P}$ [0, 5]

b) $2^2 + 2^2 + 0 - 8 = 0$ donc $B \in (\mathcal{S})$ et $2 + 4 + 0 - 6 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}$ donc $B \in (\mathcal{C})$ [0, 5]

3°) a) $M(x, y, z) \in Q$ éq. $MA = MB$ éq. . $MA^2 = MB^2$ éq. $(x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2$

éq. $y = z$ d'où : $\mathcal{Q}$ est le plan d'équation $\mathcal{Q}$: y = z [1]

b) $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupe suivant la droite Δ

d'équation paramétrique : $\begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ y = z \end{cases}$, soit $y = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ d'où Δ: $\begin{cases} x = 6 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ [1]