

Devoir de synthèse n°3

Mathématiques

Durée : 3h

Mr.Hafsi Salem

3 ème Sc

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.**Exercice1** : (4pts).Donner la réponse correcte. Justifier votre réponse.

- 1) Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $U_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- a) (U_n) est croissante ; b) (U_n) converge vers 0 ; c) (U_n) est divergente.
- 2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \frac{(-1)^n}{n!}$; $n \geq 1$.
- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$; c) (V_n) n'admet pas de limite.
- 3) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\text{Soit la droite } D : \begin{cases} x = 1 - 2\beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 3\beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R} \text{ et } D' : \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 1 \\ z = 1 - \frac{2}{3}\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) $D \perp D'$; b) D est strictement parallèle à D' ; c) D et D' sont confondues.
- 4) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- On pose $I(1,0,1)$ et $J(-1,2,1)$. Le plan médiateur du segment $[IJ]$ a pour équation :
- a) $x + y + 1 = 0$; b) $x + y - 1 = 0$; c) $-x + y - 1 = 0$.

Exercice2 : (6 pts)

$$\text{Soit } (U_n) \text{ la suite définie par : } \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2 + U_n} ; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1) a) Calculer U_1 et U_2
b) Dédire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$.
- 3) Montrer que ma suite (U_n) est décroissante.
- 4) On pose pour tout entier naturel n , $V_n = \frac{U_n}{1 + U_n}$.
- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
b) Déterminer V_n en fonction de n puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.
- 5) Montrer que tout entier naturel n , $U_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}$

Dédire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice3 : (5pts)

On considère les points $A(2; -1; 3)$, $B(-2; 3; 1)$, $C(-2; 0; 4)$ et $D(9; -5; 8)$.

- 1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.
b) Montrer alors qu'une équation du plan P est $x + 2y + 2z - 6 = 0$.
- 2) a) Déterminer l'équation paramétrique de la droite Δ passant par le point D et orthogonal au plan P.
b) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonale de D sur P.
c) Dédurre la distance de D au plan P.
- 3) Déterminer l'équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par D.

Exercice3 : (5pts)

Une urne contient 4 boules blanches, 5 boules rouges et 3 boules vertes indiscernables au toucher.

- 1) On tire simultanément 2 boules de l'urne, calculer la probabilité des événements suivants :
 - a) A : « avoir 2 boules blanches »
 - b) B : « avoir 2 boules de couleurs différentes »
 - c) C : « avoir au moins une boule blanche ».
- 2) On tire successivement et **avec** remise 3 boules de l'urne, calculer la probabilité des événements suivants :
 - a) D : « avoir 3 boules de même couleur ».
 - b) E : « avoir une seule boule verte »
- 3) On inscrit le numéro **(1)** sur les boules blanches, le numéro **(-1)** sur les boules Vertes et **(0)** sur les boules rouges.
On tire successivement et **sans** remise 2 boules de l'urne.
On note S : « la somme des numéros inscrits sur les boules tirés ».
 - a) Donner les valeurs possibles de S.
 - b) Calculer la probabilité de chaque valeur de S.
 - c) Vérifier que la somme de tous ces probabilités est égale à 1.

Bon Travail

Correction

Exercice1 : (4 pts)

- 1) b). $U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$. (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc $\lim_n U_n = 0$.
- 2) b). $\lim_{n \rightarrow +\infty} |V_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$.
- 3) a). $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D'.
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 2 - 2 = 0$ donc $D \perp D'$.
- 4) c). I(1,0,1) et J(-1,2,1), $\vec{IJ} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan médiateur Q du segment [IJ]. Donc Q : $-x + y + d = 0$. Or I*J(0,1,1) \in Q $\Rightarrow d = -1$.
Ainsi Q : $-x + y - 1 = 0$.

Exercice2 : (6 pts)

$$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2+U_n}; n \geq 0 \end{cases}$$

- 1) a) $U_1 = \frac{U_0}{2+U_0} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$; $U_2 = \frac{U_1}{2+U_1} = \frac{\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}} = \frac{1}{7} = \frac{3}{21}$.
- b) $U_1 - U_0 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \neq U_2 - U_1 = \frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$ donc (U_n) n'est pas arithmétique.
 $\frac{U_1}{U_0} = \frac{1}{3} \neq \frac{U_2}{U_1} = \frac{9}{7}$ donc (U_n) n'est pas arithmétique.
- 2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$.
Pour $n = 0$, $0 \leq U_0 \leq 1$.
Supposons que $0 \leq U_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$.
On a $0 \leq U_n \leq 1$ implique $2 \leq 2 + U_n \leq 3$ implique $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+U_n} \leq \frac{1}{2}$ implique $0 \leq \frac{U_n}{2+U_n} \leq \frac{1}{2} \leq 1$.
et par suite $0 \leq U_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2+U_n} \leq 1$. D'où (U_n) est décroissante.
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_n}{1+U_n}$.
- a) $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{1+U_{n+1}} = \frac{\frac{U_n}{2+U_n}}{1+\frac{U_n}{2+U_n}} = \frac{\frac{U_n}{2+U_n}}{\frac{2+U_n+U_n}{2+U_n}} = \frac{U_n}{2+2U_n} = \frac{U_n}{2(1+U_n)} = \frac{1}{2} \frac{U_n}{1+U_n} = \frac{1}{2} V_n$. Ainsi (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- b) $V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, or $V_0 = \frac{U_0}{1+U_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ donc $V_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ ($0 < \frac{1}{2} < 1$).

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_n}{1+U_n} \Leftrightarrow V_n(1+U_n) = U_n \Leftrightarrow V_n + V_n U_n = U_n \Leftrightarrow U_n(1-V_n) = V_n$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{V_n}{1-V_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1}{2^{n+1}-1} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{2} < 1.$$

Exercice3 :

$A(2, -1, 3), B(-2, 3, 1), C(-2, 0, 4), D(9, -5, 8)$ et $E(8, -7, 6)$.

1) a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont clairement pas colinéaires, donc

les points A, B et C ne sont pas alignés et donc déterminent un plan P.

b) Soit M un point de coordonnées (x, y, z) appartenant au plan P.

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -4 & -4 \\ y+1 & 4 & 1 \\ z-3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(4+2) - (y+1)(-4-8) + (z-3)(-4+16) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 12 + 12y + 12 + 12z - 36 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

Ainsi P : $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

2) a) Δ orthogonal à P alors le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur à Δ .

$$\text{Ainsi } \Delta : \begin{cases} x = 9 + \alpha \\ y = 2 - 5\alpha \\ z = 2 + 8\alpha \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}.$$

b) On pose $H(x_H, y_H, z_H)$. H appartient à l'intersection de P et Δ signifie

$$\begin{cases} x = 9 + \alpha \\ y = 2 - 5\alpha \\ z = 2 + 8\alpha \\ x + 2y + 2z - 6 = 0. \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \text{ signifie } \begin{cases} x = 9 + \alpha \\ y = -5 + 2\alpha \\ z = 8 + 2\alpha \\ 9 + \alpha - 10 + 4\alpha + 16 + 4\alpha - 6 = 0. \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{signifie } \begin{cases} x = 9 + \alpha \\ y = -5 + 2\alpha \\ z = 8 + 2\alpha \\ 9\alpha = -9. \end{cases} \alpha \in \mathbb{R} \text{ signifie } \begin{cases} x = 8 \\ y = -7 \\ z = 6 \\ \alpha = -1 \end{cases} . \text{ Ainsi } H(8, -7, 6).$$

c) La distance du point D au plan P est $DH = \sqrt{(8-9)^2 + (-7+5)^2 + (6-8)^2} = 3$.

3) $Q \parallel P$ alors $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normale à Q . donc $Q : x + 2y + 2z + d = 0$

Or $D \in Q$ alors $8 + 2 \times (-5) + 2 \times 8 + d = 0 \Rightarrow d = -15$.

Ainsi $Q : x + 2y + 2z - 15 = 0$.

Exercice4 :

1) a) $p(A) = \frac{C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$.

b) $p(B) = \frac{C_4^1 \times C_5^1 + C_5^1 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{20+15+12}{66} = \frac{47}{66}$.

c) $p(\overline{C}) = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$ donc $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$.

2) a) $p(D) = \left(\frac{4}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{3}{12}\right)^2 = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8}$.

b) $p(E) = \frac{3}{12} \times \left(\frac{9}{12}\right)^2 \times 3 = \frac{729}{1728}$.

3) a) $S = \{1, -1, 0, -2, 2\}$

b) $p(S = 1) = p((1,0)) + p((0,1)) = \frac{4}{12} \times \frac{5}{11} \times 2 = \frac{40}{132}$.

$p(S = -1) = p((-1,0)) + p((0,-1)) = \frac{3}{12} \times \frac{5}{11} \times 2 = \frac{30}{132}$.

$p(S = 0) = p((0,0)) + p((-1,1)) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} + \frac{3}{12} \times \frac{4}{11} \times 2 = \frac{44}{132}$.

$p(S = -2) = p((-1,-1)) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} = \frac{6}{132}$.

$p(S = 2) = p((1,1)) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{12}{132}$.

c) $\sum_k p(S = k) = \frac{40}{132} + \frac{30}{132} + \frac{44}{132} + \frac{6}{132} + \frac{12}{132} = \frac{132}{132} = 1$.