Devoir de Synthèse N°3
Mathématiques
coéff :3

Classe : $3^{éme}$ sci
Date : 30/05/2012
Duré : **3h**

Exercice 1(8 pts) On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;2[$ par: $f(x)=\frac{2-3x}{x-2}$

Et la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

« Les parties ***I***, ***II*** et ***II*** sont presque indépendantes »

I- 1°) a- Etudier le sens de variation de f sur son domaine de définition.

b- Montrer que : $U_{n+1} = \frac{-4}{U_n - 2} - 3 \quad \forall\, n \in IN$

c- Calculer U_1 et U_2 puis montrer que la suite U_n n'est ni arithmétique ni géométrique.

2°) « Les réponses de la $2^{ème}$ question a et b seront traitées sur la page 3 »

On donne « dans la page 3 » la courbe ξ_f de la fonction f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

a- Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite U.

b- Déduire graphiquement un encadrement approprié aux termes de la suite U ; ainsi que la variation, la limite en $+\infty$; la convergence ou la divergence de cette suite.

II- 1°) a- Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in IN \quad -2 < U_n \leq 0$.

b- Prouver que : $U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n{}^2 - U_n + 2}{U_n - 2}$ et déduire que la suite (U_n) est décroissante.

2°) a- Montrer que $\forall\, n \in IN \quad U_{n+1} + 2 \leq \frac{1}{2}(U_n + 2)$

b- Prouver par récurrence que : $\forall\, n \in IN \quad U_n + 2 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c- Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

III- Soit (t_n) une suite définie sur IN par $t_n = \frac{2+U_n}{U_n - 1}$

1°) a - Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b- Déduire l'expression de t_n puis U_n en fonction de n.

c- Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2°) a- Calculer la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$ puis déduire $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k - 1}$

b- Déduire alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{-8}{3}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = -\infty$.

Voir verso

Exercice 2 (7 pts) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Et ξ_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1°) a- Prouver que f est périodique en donner sa période T.

b- Montrer que $\Delta : x = \frac{\pi}{6}$ est un axe de symétrie à ξ_f.

c- Déduire qu'on peut réduire l'étude de f seulement sur $D_E = [\frac{-\pi}{3} ; \frac{\pi}{6}]$.

2°) a- Montrer que f est dérivable sur D_E

b- Déduire le sens de variation de f sur D_E

c- Déterminer les points d'intersection de ξ_f avec l'axe des abscisses sur $[-\pi ; \pi]$

d- Calculer $f(\frac{-\pi}{6})$; f(0) et $f(\frac{\pi}{4})$; Tracer alors ξ_f sur $[-\pi ; \pi]$

3°) a- Calculer : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{8.\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) - 4\sqrt{3}}{4x-\pi}$

b- Déterminer l'équation de la tangente à ξ_f au point d'abscisse 0.

4°) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

a- Montrer que $g(x) = 2\cos\left(2\left[x - \frac{\pi}{6}\right] - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

b- Tracer alors dans le même repère ξ_g la courbe de cette fonction sur $[0 ; \pi]$

Exercice 3 (5 pts) L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

On donne les points A(0 ; 0 ; -1) ; B(1 ; -1 ; -5) ; C(-1 ; 0 ; 1) et E(-3 ; 1 ; -2)

1°) a- Vérifier que A, B et C déterminent un plan *P*

b- Montrer qu'une équation cartésienne de *P* est: $2x - 2y + z + 1 = 0$

c-Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par E et perpendiculaire à *P*.

2°) Soit H le projeté orthogonal de E sur le plan *P*

a- Déterminer les coordonnés du point H.

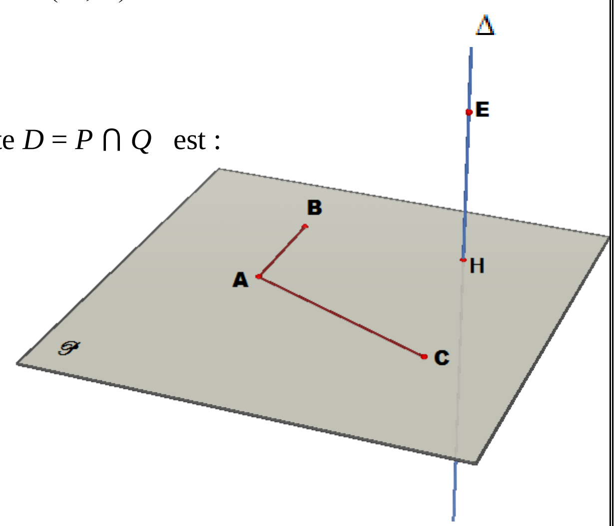
b- Déduire alors que la distance du point B à la droite Δ est $d(B, \Delta) = 2\sqrt{5}$.

3°) a- Soit *Q* le plan perpendiculaire à (BH) passant par A

a- Déterminer l'équation cartésienne du plan *Q*.

b- Déduire qu'une représentation paramétrique de la droite $D = P \cap Q$ est :

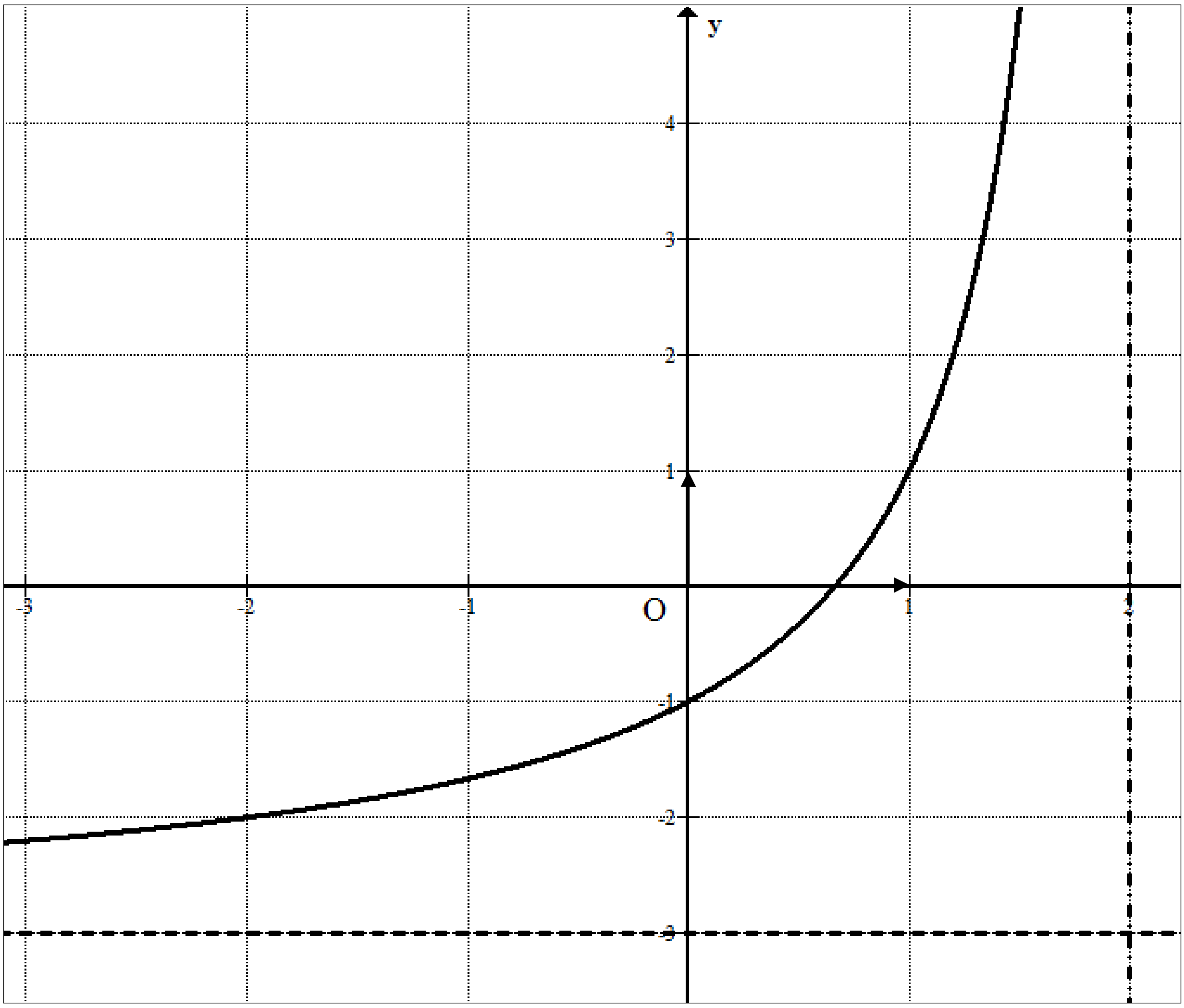
$$D : \begin{cases} x = 2 + 2\alpha \\ y = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \text{où } \alpha \in IR$$



Bonne chance

Nom et Prénom :………………………………………………………… **N°**……. **Classe 3éme Sciences**

Représentation graphique de la fonction f sur $]-\infty;2[$



D'après l'étude graphique de la suite récurrente : $U_{n+1} = f(U_n)$ On a :

- **Encadrement de** U_n $\forall n \in IN$**:** ……………………………………………………………………
- **Sens de variation de la suite** U_n : La suite U_n est …………………………
- **Limite et Convergence ou divergence de** U_n **:** La suite U_n est ……………… et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n =$ ………