

EXERCICE n°1)(9pts)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N}^* par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{2 + U_n} \end{cases}$

1)a- Calculer U_1 et U_2 .

b-Montrer que la suite (U_n) ni arithmétique ni géométrique.

2)a- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leq U_n \leq 1$.

b-Démontrer que la suite (U_n) est croissante.

3) on pose la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

a- Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et de raison $q = \frac{1}{3}$.

b – Exprimer V_n en fonction de n ; puis en déduire que $U_n = \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 + (\frac{1}{3})^n}$

c – Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ou $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$.

EXERCICE n°2)

L'espace (ξ) est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{OI} ; \vec{OJ})$; on considère les points $A(1 ; -1 ; 0) ; B(2 ; 0 ; 1) ; C(0 ; -1 ; 1)$ et $D(2 ; -\frac{5}{2} ; 2)$.

1)a- Montrer que ABC est un triangle rectangle en A.

b- Calculer $\vec{DB} \cdot \vec{DC}$ puis BD et DC et en déduire $\cos \widehat{BDC}$

2) a- Calculer l'aire de triangle ABC.

b- En déduire la distance de point A par rapport au droite (BC).

3) On pose $l = B * C$ et on note $(P) = \text{le plan}(ABC)$

a- Montrer que la droite (ID) perpendiculaire au plan (P) .

b- En déduire que le plan (P) d'équation cartésienne : $x - 2y + z - 3 = 0$.

4) Soit la droite (Δ) :
$$\begin{cases} x = 1 - 3\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 5 + 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

a- Montrer que (Δ) et le plan (ABC) sont sécantes .

b- Déterminer les coordonnées de point $E = (P) \cap \Delta$.

c- Montrer que A ; B et E sont alignés.

5) Soit le plan (Q) contenant Δ et perpendiculaire au plan (P)

a- Donner deux vecteurs directeurs de (Q)

b- En déduire une équation cartésienne de plan (Q)

c- Déterminer $(Q) \cap (ID)$ et en déduire que les deux droites Δ et (ID) sont non-coplanaires.