Lycée Houmt Souk Jerba **Prof : Loukil Mohamed**	**Devoir de Synthèse N : 3** **Durée : 3 Heures**	**3 Mathématique 1** **30 Mai 2011**

EXERCICE N : 1 (4 points)

La répartition de 10 joueurs d'une équipe de basket ball selon le nombre de fautes commises au cours d'un match est donné par le tableau suivant :

Nombre de faute(s)	0	1	2	3	4	5
Nombre de joueur(s)	2	1	1	2	3	1

I) Un joueur est choisi au hasard .

1) *Soit l'évènement* **A :** *« Le joueur ait commis 0 faute » .Vérifier que p(A) =* $\frac{1}{5}$.

2) *Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :*

B : *« Le joueur a été expulsé pendant le match»* **(Un joueur est expulsé lorsqu'il commet 5 fautes)**

C : *« Le joueur a commis au plus 1 fautes » .*

II) *L'entraîneur choisi* **cinq joueurs au hasard** *pour formé l'équipe titulaire.*

Pour tout $k \in \{ 0 , 1 , 2 \}$ *on considère l'évènement :*

S_K *: « Avoir exactement K joueur(s) qui n'ont commis aucune faute » .*

On désigne par : p_K *la probabilité de l'évènement* S_K .

1) *Calculer* p_k *pour tout* $k \in \{ 0 , 1 , 2 \}$.

2) *Déduire la probabilité de l'évènement :*

D : *« Avoir au moins un joueur parmi les cinq choisis qui n'a commis aucune faute »*

III) *Parmi les 10 joueurs ,* **deux sont choisis au hasard** *, l'un est nommé capitaine et l'autre son remplaçant . Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :*

E : *« La somme des fautes du capitaine et son remplaçant est égal à 7 »*

F : *« Le capitaine a commis 3 fautes pendant le match »*

$\mathbf{E \cup F}$.

EXERCICE N : 2 (5 points)

L'espace (ξ) est rapporté à un repère orthonormé direct ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

A) **(S_m)** $= \{ M(x, y, z) \in \xi$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4(m-1)x + 2(m-1)y - 2(m-1)z = 0 \}$

avec m est un paramètre réel et **P** le plan d'équation : $2x - y + z = 0$.

1) Montrer que pour tout $m \neq 1$, **(S_m)** est la sphère de centre Ω_m ($2m - 2, 1 - m, m - 1$)

et de rayon $R_m = \sqrt{6}\ |m - 1|$.

2) Soit **(F)** l'ensemble des points Ω_m quand m varie dans IR \ { 1 } . Déterminer la nature de **(F)** .

3) Montrer que **P** est tangent à **(S_m)** pour tout $m \neq 1$.

B) On considère les points A (4 , 0 , 0) , B (0 , - 2 , 0) et C (0 , 0 , 2) .

1) a) Calculer le vecteur $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $x - 2y + 2z - 4 = 0$.

2) a) Calculer le volume **V** du tétraèdre OABC .

b) Déduire la hauteur **h** du tétraèdre OABC issue du point O .

3) a) Vérifier que **(S_2)** est la sphère circonscrite au tétraèdre OABC .

b) Déterminer le rayon r et le centre H du cercle **(C)** intersection de **(S_2)** et (ABC) .

c) H est- il le pied de la hauteur, du tétraèdre OABC , issue de O ? Justifier votre réponse

EXERCICE N : 3 (5 points) (Les parties A et B sont indépendantes)

A) Soient ABCD un carré de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ I et J les milieux respectifs de [AB] et [AD] et K le symétrique de I par rapport à A .

1) a) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme B en D et J en K

b) Montrer que A est le centre de la rotation R et $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de son angle .

c) En déduire que (B J) et (D K) sont perpendiculaires .

d) Montrer que J est l'orthocentre du triangle DKB .

2) Soit H le projeté orthogonal de A sur (B J) et G = R (H) .

a) Montre que G appartient à la droite (D K) et que (A G) et (A H) sont perpendiculaires .

b) Déduire une construction de G .

c) Montrer que les points A , B , O et H sont situés sur un même cercle que l'on précisera .

d) Montrer que G , H et O sont alignés.

B) Sans justification , indiquer la seule réponse exacte parmi les propositions suivantes .

1) la transformation $S_{(BC)} \circ S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$ est :

a) une rotation **b)** une translation **c)** l'identité du plan

2) La fonction composée $r_{(O, -\frac{\pi}{2})} \circ r_{(C, \frac{\pi}{2})}$ est égal à :

a) S_A **b)** $t_{\overrightarrow{CB}}$ **c)** $t_{\overrightarrow{AD}}$

EXERCICE N : 4 ***(6 points)***

A) *Soit la fonction f définie par :* $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+3}{x+1}$.

(Cf) *désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé* $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) *Montrer que pour tout* $x \in D_f$; $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{2}{x+1}$.

b) *Déduire les asymptotes à* ***(Cf)*** .

2) *Dresser le tableau de variations de f* .

3) *Tracer la courbe* ***(Cf)*** *dans le repère R* .

B) *Soit h la fonction définie par :* $h(x) = f(2\cos 2x) = 4\cos(2x) + 1 + \dfrac{2}{2\cos(2x)+1}$.

1) *Déterminer* D_h *le domaine de définition de h* .

2) *Justifier qu'il suffit d'étudier h sur l'intervalle* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cap D_h$.

3) *Etudier le signe de* $2\cos(2x) + 1$ *sur* $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ *puis déduire* $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{3})^+} h(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{3})^-} h(x)$.

4) a) *Montrer que pour tout* $x \in Dh$; $h'(x) = \dfrac{-16\sin(4x)[1+\cos(2x)]}{[2\cos(2x)+1]^2}$.

b) *Etudier les variations de h sur* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cap D_h$.

c) *Tracer dans un repère orthogonal la courbe* ***(*** Γ ***)*** *de la restriction de h sur* $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}] \cap D_h$.