

SECTION : 3^è MATH

EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE 2 h : coefficient 4

EXERCICE N°1(5points)Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

- 1) a) Ecrire a et b sous forme trigonométrique
b) Placer les points A et B dans le repère
- 2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C
a) Déterminer l'affixe c du point C
b) Vérifier que $c^2 = 1 + 2i\sqrt{6}$
- 3) Soit D le point d'affixe c^2
a) Montrer que $OD = 5$
b) Construire le point D

EXERCICE N°2(5points)Le plan est munie d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

Dans la figure de l'annexe ci- jointe

*(C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ * A et D sont les points d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{2}i$ et $z_D = 2\sqrt{2}i$

- 1) Soit B et C les points d'affixes respectives $z_B = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_C = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
a) Ecrire z_B et z_C sous forme trigonométrique
b) Placer les points B et C dans le repère
c) Montrer que (BC) et (AD) sont perpendiculaires
d) Montrer que le quadrilatère ABDC est un losange
- 2) Calculer l'aire de ce losange

EXERCICE N°3(5points)Soit $a \in]0, 2[$: On considère la suite (u_n) définie par $U_0 \in [0, 2a[$

$$u_n = \frac{(a+2)u_n}{u_n + 2 - a}$$

- 1) Montrer que pour tout n élément de \mathbb{N} , $u_n \in]0, 2a[$
- 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante

4) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n}{u_n - 2a}$

- Montrer que (v_n) est une suite géométrique d'ont on précisera la raison en fonction de a
- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
- Calculer $\lim_{+\infty} v_n$ et $\lim_{+\infty} u_n$

Exercice n°4(5points)

Soit α un nombre réel appartenant à $]0, 1[$

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}

par $u_0 = 0$ et pour tout n appartenant à \mathbb{N} , $u_{n+1} = \sqrt{1 + \alpha u_n^2}$

1) a- Montrer que pour tout n de \mathbb{N} on a, $u_n < \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante

2) a) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} on a $U_n = \sqrt{\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}}$

b) Calculer $\lim_{+\infty} u_n$

3) Soit $S_n = \sum_{k=1}^n u_k^2$, Calculer S_n puis $\lim_{+\infty} \frac{S_n}{n}$