Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 3** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 30 / 04 / 2016	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (8 pts)

A. Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{x}{1+x+x^2}$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in IR$, $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x+x^2\right)^2}$.

   $b/$ Etablir le tableau de variation de f.

2) $a/$ Montrer que : si $x\in[0\,;\,1]$ alors $f(x)\in[0\,;\,1]$.

   $b/$ Vérifier que pour tout $x\in IR^*$, on a : $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$.

B. Soit U la suite définie sur IN^* par : $\begin{cases} U_1=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \text{ pour tout } n\in IN^* \end{cases}$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN^*$, on a : $0\le U_n\le 1$.

   $b/$ Etudier la monotonie de la suite U.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN^*$ on a : $f\left(\dfrac{1}{n}\right)\le\dfrac{1}{n+1}$.

   $b/$ Montrer, par récurrence que, pour tout $n\in IN^*$, $U_n\le\dfrac{1}{n}$.

   $c/$ Calculer alors la limite de la suite U.

3) $a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN^*$ on a : $\dfrac{1}{U_{n+1}}-\dfrac{1}{U_n}=1+U_n$.

   $b/$ En déduire que, pour tout $n\ge 2$, $\dfrac{1}{U_n}=n+\sum_{k=1}^{n-1}U_k$.

   $c/$ Montrer alors que, pour tout $n\ge 2$, $\dfrac{1}{U_n}\ge n$.

   $d/$ Calculer $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{U_n}$ puis retrouver la limite de la suite U.

Exercice n°2 : (6 pts)

Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que :

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{6}.$$

1) Calculer a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3.

2) $a/$ Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.

$b/$ Montrer que : 5 divise $a_n + b_n$ si, et seulement si, 5 divise $a_{n+1} + b_{n+1}$.

$c/$ En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

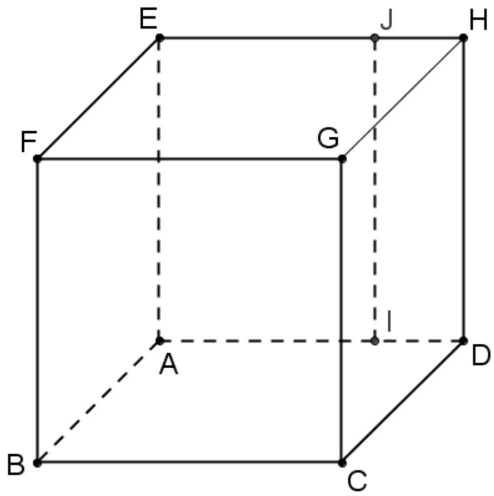
3) On pose $d_n = a_n \wedge b_n$.

$a/$ Montrer que d_{n+1} divise $5b_n$ et que d_{n+1} divise $5a_n$.

$b/$ En déduire que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

$c/$ Déduire de ce qui précède que, pour tout entier $n \geq 1$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice n°3 : (6 pts)



Dans la figure ci-contre, $ABCEFGH$ est un cube d'arête 1.

Soient I et J les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{EJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD}$.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées des points F, G, I et J.

2) Soit α un réel et M est le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \alpha\right)$.

$a/$ Vérifier que $M \in (IJ)$.

$b/$ Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM}$.

$c/$ En déduire que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) $a/$ Montrer que : (A, F, M et G sont coplanaires) si, et seulement si (M et I son confondus).

$b/$ Pour M distinct de I, calculer en fonction de α, le volume du tétraèdre $AFMG$.

$c/$ Déterminer les points M de la droite (IJ) pour lesquels les tétraèdres $AFMG$ et $BCMG$ ont le même volume.

4) Soit K le projeté orthogonal de G sur le plan (AFJ) et K' le projeté orthogonal de G sur le plan (BCJ).

Montrer que le triangle GKK' est isocèle.

Bonne chance