Lycée Thelepte A.S :2009-2010	**Devoir de contrôle n°3** Epreuve : Mathématiques Durée : 3 heures	Section : 3ème math Enseg : H.Salem

Exercice1 : (3points)

Donner la réponse correcte.

1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{6}} =$: **a)** 0 ; **b)** 1 ; **c)** 2

2) 703 est un nombre : **a)** composé ; **b)** premier

3) Soit n un entier naturel alors le nombre $n + 2$ est premier avec :

a) $2n + n^2$; **b)** $n + 3$; **c)** $2n + 4$

Exercice2: (5points)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos^2 x - \cos x$

1) a) Vérifier que f est périodique de période 2π

b) Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$.

c) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.

2) a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

b) Tracer (C_f) courbe représentative de la restriction de f sur $[-\pi, \pi]$.

3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \sin^2 x - \sin x$

En utilisant la courbe de f, tracer la courbe de g (expliquer).

Exercice3: (4points)

Soit n un entier naturel

1) a) Vérifier que $(n - 1)(1 + n + n^2 + n^3) = n^4 - 1$

b) En déduire que $2^{12} - 1$ est divisible par 7.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n ; $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

b) En déduire $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont divisibles par 7.

c) Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 des nombres suivants.

2^{3000}; 2^{4015}; 2^{10250}

Exercice4: ***(3points)***

On lance un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Soient les deux événements suivants :

A : « Obtenir un multiple de 3 » ; B : « Obtenir un nombre supérieure ou égale à 3 »

Soit p_i *est la probabilité d'apparition de la face* i

On suppose que $p_3 = 3p_6$, $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = a$ *et* $p(A) = b$.

1) *Déterminer a et b sachant que* $p(B) = \frac{3}{4}$.

2) *En déduire la probabilité d'avoir un nombre impair.*

Exercice5: (5points)

Une urne contient **5** *boules blanches et* **4** *rouges indiscernables au toucher.*

I) *On tire au hasard et successivement* **3** *boules de l'urne en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :*

A « Obtenir exactement deux boules blanches »

B « Obtenir trois boules de même couleur »

D « Obtenir au moins une boule rouge »

II) *L'épreuve consiste maintenant à effectuer* $\boldsymbol{n}$ *tirages successifs en remettant la boule tirée dans l'urne si elle est rouge, on le remettant pas si elle est blanche.*

1) *Dans cette question on prend* $\boldsymbol{n} = 3$.

Soit E_k *l'événement" seule la k* *ème* *boule tirée est blanche"*

a) *Montrer que* $p(E_1) = \frac{5}{36}$ *et calculer* $p(E_2)$ *et* $p(E_3)$.

b) *Qu'elle est la probabilité d'obtenir une seule boule blanche.*

2) *Déterminer en fonction de n, la probabilité* $\boldsymbol{p_n}$ *de tirer au moins une boule blanche en* $\boldsymbol{n}$ *tirages.*

BON TRAVAIL

Correction

Exercice1

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$ *est la dérivée de la fonction* $x :\to \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ en $\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{6}} = 2\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

2) *703 est un nombre composé car* $703 = 19 \times 37$.

3) *Si n est un entier naturel alors le nombre* $n+2$ *est premier avec n+3.*

Exercice2

1) ***a)*** $\forall\, x \in IR; x+2\pi \in IR$ *et* $f(x+2\pi) = \cos^2(x+2\pi) - cos(x+2\pi) = cos^2x - cosx = f(x)$.

b) *f est paire, en effet ;* $\forall\, x \in IR; -x \in IR$ *et* $f(-x) = \cos^2(-x) - cos(-x) = cos^2x - cosx = f(x)$*, et comme f est périodique de période* 2π *donc il suffit d'étudier f sur* $[0,\pi]$.

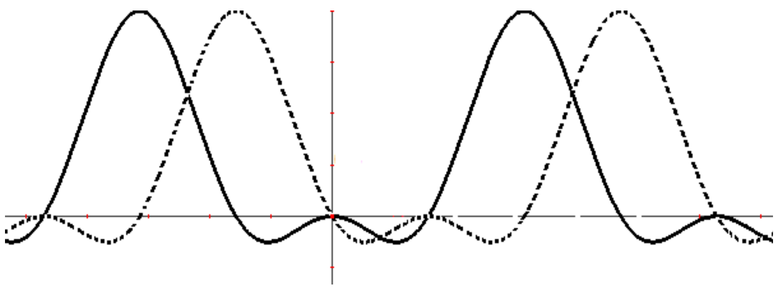
c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow cos^2x - cosx = 0 \Leftrightarrow cosx(cosx-1) = 0 \Leftrightarrow cosx = 0\ ou\ cosx = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}\ ou\ x = \pi \Leftrightarrow\ S_{[0,\pi]} = \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

2) ***a)*** *f est dérivable sur IR et* $\forall x \in IR ; f'(x) = -2sinx\ cosx + sinx = sinx(1-2cosx)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow sinx = 0\ ou\ cosx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = \pi\ ou\ x = \frac{\pi}{3}$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$sinx$	+		+
$2cosx-1$	--	0	+
$f'(x)$	--	0	+
f	↘	$-\frac{1}{4}$	↗



c) *On a :* $\forall\, x \in IR\ ; cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = sinx$

et, donc $g(x) = cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

Ainsi la courbe représentative de g est déduite à partir de celle de f par une translation du vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Exercice3

1) ***a)*** $(n-1)(1+n+n^2+n^3) = \cancel{n} + \cancel{n^2} + \cancel{n^3} + n^4 - 1 - \cancel{n} - \cancel{n^2} - \cancel{n^3} = n^4 - 1$.

b) *On prend* $n = 2^3$*, on obtient :*

$(2^3-1)(1+2+2^2+2^3) = (2^3)^4 - 1 \Leftrightarrow 7\times(1+2+2^2+2^3) = 2^{12} - 1$.

D'où $2^{12}-1$ *est divisible par 7.*

2) ***a)*** *Montrons par récurrence que* $\forall\, n \in \mathbb{N};\ 2^{3n}-1$ *est divisible par 7.*

Pour n =1 : $2^{3\times 1}-1=7$*: Divisible par 7.*

Supposons que $2^{3n}-1$ *est divisible par 7 et montrons que* $2^{3(n+1)}-1$ *est divisible par 7.*

$$2^{3(n+1)}-1=2^{3n}+2^{3}-1=2^{3n}\times 8-1=2^{3n}(7+1)-1=\underbrace{7\times 2^{3n}}_{\text{divisible par 7}}+\underbrace{2^{3n}-1}_{\text{divisible par 7}}$$

b) $2^{3n+1}-2=2^{3n}\times 2-2=2(2^{3n}-1)$ *qui est divisible par 7.*

$2^{3n+2}-4=2^{3n}\times 4-4=4(2^{3n}-1)$ *qui est divisible par 7.*

c) $2^{3000}=2^{3\times 1000}=(\underbrace{2^{3\times 1000}-1}_{\text{Divisible par 7}})+1$ *d'où le reste de la division euclidienne de* 2^{3000} *par 7 est 1.*

$$2^{4015}=2^{4014+1}=2^{3\times 1338+1}-2+2=(\underbrace{2^{3\times 1338+1}-2}_{\text{Divisible par 7}})+2\,.$$

d'où le reste de la division euclidienne de 2^{3000} *par 7 est 2.*

$$2^{10250}=2^{3\times 3416+2}-4+4=(\underbrace{2^{3\times 3416+2}-4}_{\text{Divisible par 7}})+4$$

d'où le reste de la division euclidienne de 2^{3000} *par 7 est 4.*

Exercice4

1) *On a :*

$\sum_{i=1}^{6} p_i=1 \Rightarrow p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1 \Rightarrow a+3p_6+a+a+a+p_6=1 \Rightarrow\ 4a+4p_6$ **(1)**

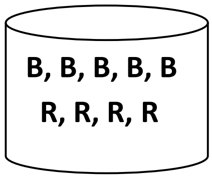
$p(A)=b \Rightarrow p_3+p_6=b$ or $p_3=3p_6 \Rightarrow\ 4p_6=b$ donc **(1)** $\Rightarrow 4a+b=1$ **(2)**

$p(\overline{B})=1-\frac{3}{4} \Rightarrow p_1+p_2=\frac{1}{4} \Rightarrow 2a=\frac{3}{4} \Rightarrow\ a=\frac{1}{8}$ donc **(2)** $\Rightarrow\ b=1-4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.

D'où $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{1}{2}$ et $p_6=\frac{1}{8}$

2) soit q la probabilité d'obtenir un nombre impaire. On $q=p_1+p_3+p_5=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

Exercice5



I) $\bullet\, p(A)=\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}\times \underbrace{C_3^2}_{\text{rang des deux boules blanches}}=\frac{300}{729}$

$\bullet$ (*B « 3 B ou 3R »*) $p(B)=\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{189}{729}$

● *Soit l'événement* $\overline{D}$ *« n'obtenir aucune boule rouge »*

On a $p(\overline{D}) = \frac{5^3}{9^3} = \frac{125}{729} \Rightarrow p(D) = 1 - \frac{125}{729} = \frac{604}{729}$.

II) ***1) a)*** $\boldsymbol{E_1}$ *« seule la première boule est blanche ».* $p(E_1) = p(BRR) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{36}$

$\boldsymbol{E_2}$ *« seule la 2ème boule est blanche.* $p(E_2) = p(RBR) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{10}{81}$

$\boldsymbol{E_3}$ *« seule la 3ème boule est blanche.* $p(E_3) = p(RRB) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{80}{729}$

b) *La probabilité d'obtenir une seule boule blanche est* $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

Or les évènements E_1, E_2 *et* E_3 *sont incompatibles,*

donc $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{5}{9\times4} + \frac{5\times2}{9^2} + \frac{4^2\times5}{9^3}$

$= \frac{5\times9^2}{9^3\times4} + \frac{5\times2\times4\times9}{9^3\times4} + \frac{4^2\times5\times4}{9^3\times4} = \frac{1085}{2916} \cong 0{,}37$

1) *Soit* q_n *la probabilité de ne tirer aucune boule blanche en n tirage c'est-à-dire toutes les boules tirées sont rouges.*

D'où $q_n = \underbrace{\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \dots \times \frac{4}{9}}_{n\ fois} = \left(\frac{4}{9}\right)^n$ *d'où* $p_n = 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Fin