Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 2** Mathématiques	Niveau :3 ème Math 1+2
Date : 06 / 03 / 2019	Profs :Mme Fkih Ahmed H & Mr Meddeb T	Durée : 3 heures

Exercice n°1 : (5 pts)

A- Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=3x^3-8x+8$.

1) Etudier les variations de g. (On admet que $g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\approx 3$ et que $g\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\approx 13$).

2) Calculer $g(-2)$, en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B- Soit f la fonction définie sur IR^* par : $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{2x-1}{x^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de f.

$b/$ Montrer que, pour tout $x\in IR^*$, $f'(x)=\frac{g(x)}{4x^3}$.

$c/$ Etablir le tableau de variations de f.

2) $a/$ Montrer que la droite $\Delta : y=\frac{3}{4}x$ est une asymptote de $\mathscr{C}_f$.

$b/$ Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

$c/$ Ecrire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

$d/$ Tracer Δ , T et $\mathscr{C}_f$.

Exercice n°2 : (5 pts)

Soit U la suite définie sur IN^* par $U_1=12$ et pour tout $n\in IN^*$, $U_{n+1}=2U_n+6$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n\in IN^*$, $U_n=9\times 2^n-6$.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN^*$, U_n est divisible par 6.

$b/$ Déterminer le reste de la division euclidienne de U_n par 9.

3) On pose, pour tout $n\in IN^*$, $V_n=\frac{U_n}{6}$.

$a/$ Vérifier que, pour tout $n\in IN^*$, $V_{n+1}-2V_n=1$.

$b/$ En déduire que, pour tout $n\in IN^*$, V_n et V_{n+1} sont premiers entre eux.

$c/$ Calculer alors $U_n\wedge U_{n+1}$, pour tout $n\in IN^*$.

4) $a/$ Montrer, par récurrence, que : pour tout $n\in IN$, U_{4n+2} est divisible par 5.

$b/$ Montrer que, pour tout $n\in IN^*$, $U_{n+4}-2^4U_n=90$.

$c/$ Calculer $U_{42}\wedge U_{46}$.

Exercice n°3 : (5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On appelle I et J les points d'affixes respectives 1 et i.

A- Soient les nombres complexes $u=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $v=1-i$.

1) Ecrire sous la forme algébrique chacun des nombres complexes $u'=\frac{i}{u}$ et $v'=\frac{i}{v}$.

2) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes u, v, u' et v'.

3) Soient A, B, A' et B' les points d'affixes respectives u, v, u' et v'.

$a/$ Placer les points A, B, A' et B'.

$b/$ Quel est la nature de chacun des triangles OAA' et OBB'? Justifier la réponse.

B- A tout point M d'affixe z non nul, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{i}{z}$.

1) $a/$ Montrer que $|z'|.|z|=1$ et que $\arg(z')\equiv\frac{\pi}{2}+\arg(z)[2\pi]$.

$b/$ En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2) $a/$ Montrer l'équivalence suivante : $|z'-i|=|z'|\Leftrightarrow|z-1|=1$.

$b/$ Déterminer l'ensemble Δ des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 1 privé de l'origine.

Exercice n°4 : (5 pts)

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n^2-U_n+3}{U_n} \quad \text{pour tout } n\in IN \end{cases}$.

1) $a/$ Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in IN$, $1<U_n<3$.

$b/$ Montrer que la suite U est croissante.

$c/$ En déduire que pour tout $n\in IN$, $2\le U_n<3$.

2) $a/$ Montrer que pour tout $n\in IN$, $0<3-U_{n+1}<\frac{2}{3}(3-U_n)$.

$b/$ En déduire que pour tout $n\in IN$, $0<3-U_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$c/$ En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

3) On pose pour tout $n\in IN^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{U_k}=\frac{1}{U_1}+\frac{1}{U_2}+.....+\frac{1}{U_n}$ et $T_n=\frac{S_n}{n}$.

$a/$ Vérifier que pour tout $k\in IN^*$, $U_{k+1}-U_k=\frac{3}{U_k}-1$. En déduire que $S_n=\frac{1}{3}\left(U_{n+1}+n-\frac{5}{2}\right)$.

$b/$ Montrer alors que pour tout $n\in IN^*$, $\frac{2n-1}{6}\le S_n<\frac{2n+1}{6}$.

$c/$ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$.