Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 2** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 12 / 03 / 2016	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 3 heures

Exercice n°1 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=2\cos^3 x-3\cos x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Montrer que f est 2π - périodique.

$b/$ Etudier la parité de f.

$c/$ Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$ est un centre de symétrie de C_f.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in IR$, $f'(x)=3\sin x\left(1-2\cos^2 x\right)$.

$b/$ Etablir le tableau de variations de f sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$c/$ Achever la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi\ ;\ 3\pi]$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la feuille annexe.

3) Soit g la fonction définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par : $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+1}{\sin^2 x} & si\ x\neq 0\\ g(0)=-\dfrac{3}{2} & \end{cases}$.

$a/$ Vérifier que, pour tout $x\in IR$, on a : $2x^3-3x+1=(x-1)\left(2x^2+2x-1\right)$.

$b/$ Montrer que g est continue en 0.

Exercice n°2 : (4 pts)

Soit f la fonction définie sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=x^2-2\sin x$.

1) Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$, puis étudier les variations de f' sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2) $a/$ Montrer que l'équation : $f'(x)=0$ admet dans $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ une solution unique notée α.

$b/$ Vérifier que $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

3) $a/$ Etudier les variations de f sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$b/$ On désigne par m le minimum de f sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que : $m=\alpha^2-2\sqrt{1-\alpha^2}$.

Exercice n°3 : (6 pts)

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur IN par :

$$U_n = \frac{2^n}{n!} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}.$$

1) $a/$ Exprimer V_n en fonction de n, puis montrer que (V_n) est décroissante.

   $b/$ En déduire que, pour tout $n \geq 3$, on a : $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$.

   $c/$ En déduire que, pour tout $n \geq 3$, on a : $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} U_3$.

   $d/$ Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) On pose, pour tout $n \geq 3$, $S_n = \sum_{k=3}^{n} U_k = U_3 + U_4 + ... + U_n$.

   $a/$ Montrer que, pour tout $n \geq 3$, on a : $S_n \leq 2U_3\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right)$.

   $b/$ En déduire que la suite (S_n) est majorée par $2U_3$.

   $c/$ Montrer que la suite (S_n) est croissante.

   $d/$ En déduire que, pour tout $n \geq 3$, on a : $\frac{4}{3} \leq S_n \leq \frac{8}{3}$.

Exercice n°4 : (4 pts)

On jette trois dés cubiques de couleurs différentes ayant des faces numérotées de 1 à 6.

1) Dénombrer tous les résultats possibles.
2) Dénombrer les résultats comportant un seul 6.
3) Dénombrer les résultats ne comportant aucun 6.
4) Dénombrer les résultats comportant trois numéros distincts.
5) Dénombrer les résultats tels que la somme des chiffres obtenus est égale à 6.

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synthèse n° 2 *(12 – 03 – 2016)*

Nom et prénom :………………………………………… *Classe : 3 ème Math*