Lycée : Souassi	*Devoir de Synthèse N°1*	*Prof* : Mr Wissem Fligène
Date : 06-12-2010		*Epreuve* : Mathématiques
Classe : 2S1		*Durée* : 2 heures

- Il est recommandé de soigner la rédaction et la présentation de la copie -

***Exercice 1**:* (4,5 points)

Répondre par vrai ou faux sans justification

1) Soit le trinôme de second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a ,b et c étant trois réels avec $a \neq 0$
   a) Si $c = 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet 0 pour solution.
   b) Si $a < 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'inéquation $f(x) \geq 0$ admet des solutions.
2) Si $P(x) = x(x^2 + 1)(x^3 + 2x - 1)$ alors $d°(P) = 6$
3) Si P et Q sont deux polynômes non nuls alors $d°(P + Q) = d°(P) + d°(Q)$
4) Si G est le barycentre des points pondérés (A,$\sqrt{2} - 1$), (B, 1) et (C, -1) alors G est aussi le barycentre des points pondérés (A, 1), (B,$\sqrt{2} + 1$) et (C, $-1 - \sqrt{2}$)
5) Soit A et B deux points distincts du plan et Δ une droite
   Si $(AB) // \Delta$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}(\Delta) = \Delta$

***Exercice 2**:* (7,5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 5x + 6 = 0$
2) Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
   a) Vérifier que $f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$
3) Soit $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
   a) Factoriser $t^2 - 5t + 4$
   b) En déduire que $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$
4) Soit $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
   a) Déterminer le domaine D de définition de h
   b) Montrer que pour tout x de D : $h(x) = \dfrac{x-3}{x^2+3x+2}$
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $h(x) \geq 1$

***Exercice 3**:* (8 points)

La figure doit être tracée sur une page de votre double feuille qui contient uniquement le schéma

Soit ABC un triangle isocèle tel que AB =AC =4 et BC =3 (l'unité est le cm)

1) Construire le point E barycentre des points pondérés $(A , 1)$ et $(B , -4)$
2) Soit F le point défini par $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{BC}$
   Montrer que F est le barycentre des points pondérés $(B , -2)$ et $(C , 3)$. Construire F
3) Soit G le barycentre des points pondérés $(A , 1)$; $(B , -4)$ et $(C , 6)$.
   a) Montrer que les points G, E et C sont alignés.
   b) Montrer que G appartient à la droite (AF).
   c) En déduire une construire du point G.
4) a) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan vérifiant :
   $$\|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 6\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}\|$$
   b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan vérifiant :
   $$\|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 6\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|$$
5) a) Construire les points E' , C' , G' les images respectives de E , C , G par $t_{\overrightarrow{AC}}$
   b) Montrer que les points E' , C' , G' sont alignés
   c) Soit $\Delta' = t_{\overrightarrow{AC}}(\Delta)$; Montrer que $\Delta' \perp (E'G')$.

Correction

<u>*Solution-Exercice 1 :*</u> $(6\times \boldsymbol{0,75\,pt})$

1) a) VRAI
   b) FAUX
2) VRAI
3) FAUX
4) VRAI
5) VRAI

<u>*Solution-Exercice 2 :*</u>

$x^2-5x+6=0\ (a=1\,;b=-5\,;c=6)$

$\Delta=b^2-4ac=25-24=1>0$ donc $x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-1}{2}=2$ et $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+1}{2}=3$

$\boxed{S_{\mathbb{R}}=\{2;3\}}$ $(\boldsymbol{1\,pt})$

a) $(x-1)(x^2-5x+6)=x^3-5x^2+6x-x^2+5x-6=x^3-6x^2+11x-6=f(x)$ $(\boldsymbol{0,75\,pt})$

b) $x^3-6x^2+11x-6\geq 0$ sig $(x-1)(x^2-5x+6)\geq 0$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-5x+6		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x-1)(x^2-5x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{S_{\mathbb{R}}=[1,2]\cup[3,+\infty[}$ $(\boldsymbol{1\,pt})$

a) $t^2-5t+4\ \ (a=1\,;b=-5\,;c=4)$

$a+b+c=0$ donc $x'=1$ et $x''=\frac{c}{a}=4$ donc $\boxed{t^2-5t+4\ =(t-1)(t-4)}$ $(\boldsymbol{1\,pt})$

b) $g(x)=x^4-5x^2+4$. On pose $t=x^2$ donc

$x^4-5x^2+4=\ t^2-5t+4=(t-1)(t-4)=(x^2-1)(x^2-4)$

D'où $g(x)=(x^2-1)(x^2-4)$ $(\boldsymbol{0,75\,pt})$

a) $h(x)$ est définie si et seulement si $g(x)\neq 0$

on suppose $g(x)=0$ alors $x^2-1=0$ ou $x^2-4=0$ sig $x^2=1$ ou $x^2=4$ sig $x=1$ ou $x=-1$ ou $x=2$ ou $x=-2$. Donc $\boxed{D=\ \mathbb{R}\backslash\{-2;-1;1;2\}}$ $(\boldsymbol{1\,pt})$

b)

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{x-3}{x^2+3x+2}\quad (\boldsymbol{1\,pt})$$

c) $h(x)\geq 1$

Cette inéquation existe ssi $x\in\ D=\ \mathbb{R}\backslash\{-2;-1;1;2\}$

$$h(x)\geq 1\ sig\ \frac{x-3}{x^2+3x+2}\geq 1\ sig\ \frac{x-3}{x^2+3x+2}-1\geq 0\ sig\ \frac{x-3-x^2-3x-2}{x^2+3x+2}\geq 0\ sig$$
$$\frac{-x^2-2x-5}{x^2+3x+2}\geq 0\ sig\ \frac{x^2+2x+5}{x^2+3x+2}\leq 0$$

$x^2+2x+5\ (a=1\,;b'=1;c=5)$

$\Delta'=b'^2-ac=1-5=-4<0$ donc signe de x^2+2x+5 est celui de $a=1>0$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
x^2+2x+5		$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2+3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{x^2+2x+5}{x^2+3x+2}$		$+$	||	$-$	||	$+$	

$\boxed{S_{\mathbb{R}}=]-2;-1[}$ $(\boldsymbol{1\,pt})$

Solution-Exercice 3 :

E barycentre de $(A\,,1)$ et $(B\,,-4)$ sig $\overrightarrow{AE}=\frac{-4}{1-4}\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{1-4}\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ $(\boldsymbol{0,25\,pt})$

* Construction de E $(\boldsymbol{0,75\,pt})$

2) Supposons que F est le barycentre des points (B,α) et (C,β) donc $\overrightarrow{BF}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BC}$ or $\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{BC}$ càd $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{1}\overrightarrow{BC}$ donc $\beta=3$ et $\alpha+\beta=1$ cad $\alpha=1-\beta=1-3=-2$

Ainsi F est le barycentre des points pondérés $(B\,,-2)$ et $(C\,,3)$ $(\boldsymbol{0,5\,pt})$

* construction de F $(\boldsymbol{0,5\,pt})$

3) a) On a G le barycentre de $\underbrace{(A\,,1)\,;\,(B\,,-4)}$ et $(C\,,\ 6)$ et E barycentre de $(A\,,1)$ et $(B\,,-4)$ alors G le barycentre de $(E,1-4)$ et $(C\,,\ 6)$ cad G le barycentre de $(E,-3)$ et $(C\,,\ 6)$ donc G,E et C sont alignés $(\boldsymbol{0,75\,pt})$

b) On a F est le barycentre de $(B\,,-2)$ et $(C\,,3)$ alors F est le barycentre de $(B\,,-2\times 2)$ et $(C\,,3\times 2)$ cad F est le barycentre de $(B\,,-4)$ et $(C\,,6)$

Comme G est le barycentre de $(A\,,1)$; $\underbrace{(B\,,-4)\ et\ (C\,,\ 6)}$ alors G est le barycentre de $(A\,,1)$ et $(F,-4+6)$ cad G est le barycentre de $(A\,,1)$ et $(F,2)$ donc G, A et F sont alignés

d'où $G\in(AF)(\boldsymbol{0,75\,pt})$

c) on a $G\in(AF)$ et $G\in(CE)$ [puisque G,E et C sont alignés] donc $\{G\}=(AF)\cap(CE)$ $(\boldsymbol{0,5\,pt})$

4) a) Puisque G est le barycentre de $(A\,,1)$; $(B\,,-4)$ et $(C\,,\ 6)$ alors

$\overrightarrow{\mathrm{MA}}-4\overrightarrow{\mathrm{MB}}+6\overrightarrow{\mathrm{MC}}=(1-4+6)\overrightarrow{\mathrm{MG}}=3\overrightarrow{\mathrm{MG}}$

Et comme E barycentre de $(A\,,1)$ et $(B\,,-4)$ alors $\overrightarrow{\mathrm{MA}}-4\overrightarrow{\mathrm{MB}}=(1-4)\overrightarrow{\mathrm{ME}}=-3\overrightarrow{\mathrm{ME}}$

$\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}-4\overrightarrow{\mathrm{MB}}+6\overrightarrow{\mathrm{MC}}\|=\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}-4\overrightarrow{\mathrm{MB}}\|$ sig $\|3\overrightarrow{\mathrm{MG}}\|=\|-3\overrightarrow{\mathrm{ME}}\|$ sig $3MG=3ME$ sig $MG=ME$ donc

$\underline{\Delta\ est\ la\ médiatrice\ de\ [GE]}$ $(\boldsymbol{0,75\,pt})$

* construction de Δ $(\boldsymbol{0,25\,pt})$

b) $\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}-4\overrightarrow{\mathrm{MB}}+6\overrightarrow{\mathrm{MC}}\|=2\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|$ sig $\|3\overrightarrow{\mathrm{MG}}\|=2\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\|$ sig $\|3\overrightarrow{\mathrm{MG}}\|=2\|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\|$ sig $3MG=2CB$ sig $3MG=6$ sig $MG=2$ donc $\mathcal{C}$ <u>est le cercle de centre G et de rayon 2</u> $(\boldsymbol{0,75\,pt})$

* construction de $\mathcal{C}$ $(\boldsymbol{0,25\,pt})$

5) a) $\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(E)=E$ sig $\overrightarrow{EE'}=\overrightarrow{AC}$ $(\boldsymbol{0,25\,pt})$

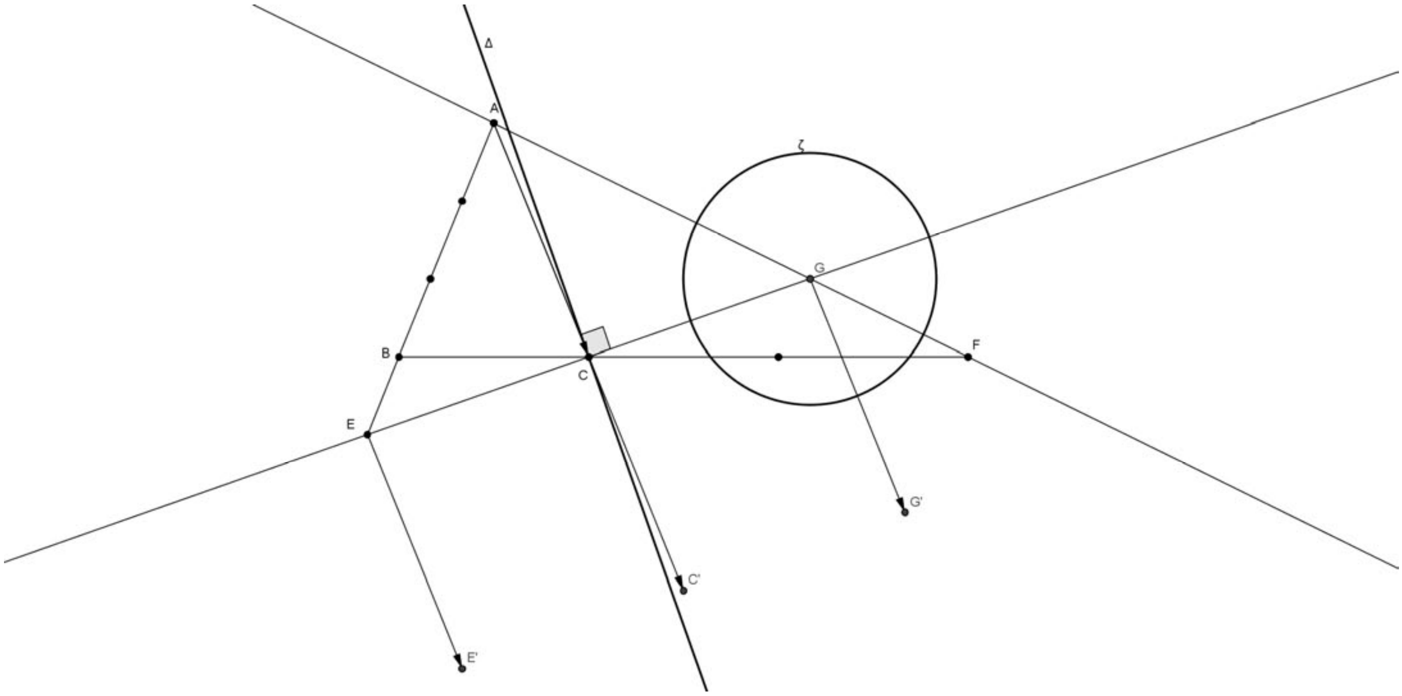
$\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(C)=C$ sig $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}$ $(\boldsymbol{0,25\,pt})$

$\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(G)=G$ sig $\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AC}$ $(\boldsymbol{0,25\,pt})$

b) On a E, C et G sont alignés et la translation conserve l'alignement alors $\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(E)$, $\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(C)=C$ et $\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(G)=G$ sont alignés cad $\mathrm{E}',\mathrm{C}',\mathrm{G}'$ sont alignés $(\boldsymbol{0,75\,pt})$

c) On a Δ est la médiatrice de [GE] alors $\Delta\perp(GE)$ et comme la translation conserve l'orthogonalité alors $\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(\Delta)\perp\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}((GE))$

d'autre part $\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}((GE))=\left(\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(\mathrm{G})\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(\mathrm{E})\right)=(G'E')$ donc $\Delta'\perp(\mathrm{E}'\mathrm{G}')$ $(\boldsymbol{0,75\,pt})$



Δ
A
ζ
G
B
C
F
E
G'
C'
E'