Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 1** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math 2
Date : 16 / 11 / 2020	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB *: Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 *(6 pts)*

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$.

1) $a/$ Soient a et b deux réels strictement positifs, montrer que : $f(b)-f(a)=\dfrac{(b-a)(ab-4)}{ab}$.

$b/$ Etudier alors le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]0,2]$ et $[2,+\infty[$.

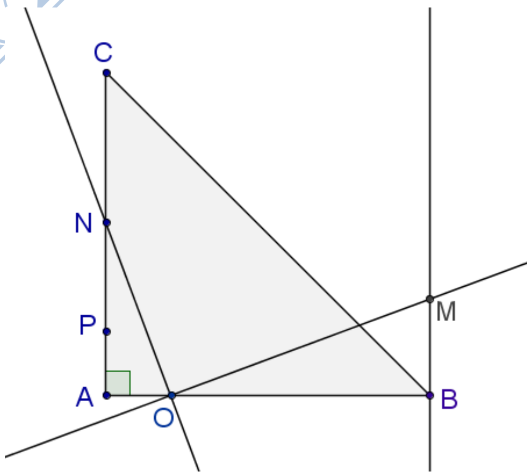
$c/$ En déduire que f admet sur $]0,+\infty[$ un minimum que l'on précisera.

2) On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que $AB=5$.

Soit O le point de $[AB]$ tel que $AO=1$ et P le point de $[AC]$ tel que $AP=1$ et N un point variable sur $[AC)$ distinct de A.

La perpendiculaire à (ON) en O et la perpendiculaire à (AB) en B se coupent en M.

On pose $AN=x$.



$a/$ Montrer que $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}$.

$b/$ En déduire que $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BM}=4$.

$c/$ Montrer alors que $BM=\dfrac{4}{x}$.

3) $a/$ Déterminer, en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ du trapèze $ABMN$.

$b/$ Pour quelle valeur de x, $\mathcal{A}(x)$ est-elle minimale ?

4) Montrer qu'il existe au moins une position du point N sur le segment $[PC]$ pour laquelle l'aire du trapèze $ABMN$ est égale à AN^2.

Exercice n°2 *(6 pts)*

1) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{|x-2|}-1}$.

$a/$ Déterminer le domaine de définition de g.

$b/$ Montrer que, pour tout $x\in]-\infty,2]\setminus\{1\}$, $g(x)=(3-x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)$.

$c/$ En déduire que g est prolongeable par continuité en 1 et définir ce prolongement.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} 3x+E(x+1) & \text{si } x\in\,]-\infty,1[\\ \dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{|x-2|}-1} & \text{si } x\in\,]1,3[\\ \dfrac{x^2+m}{x-1} & \text{si } x\in[3,+\infty[\\ f(1)=4 & \end{cases}$.

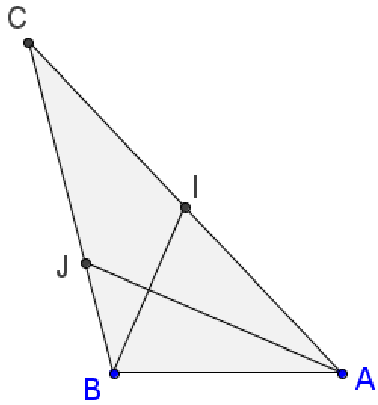
($E(x)$ désigne la partie entière de x)

$a/$ Montrer que f est continue en 1.

$b/$ Déterminer la valeur de m pour laquelle f soit continue en 3.

Exercice n°3 (8 pts)

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle tel que : $AB=2$, $AC=4$ et $BC=3$. I est le milieu de $[AC]$ et J est le barycentre des points pondérés $(B,2)$, $(C,1)$.



1) $a/$ Montrer que $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$b/$ Montrer que les droites (AJ) et (BI) sont perpendiculaires.

$c/$ En déduire que (AJ) est la médiatrice de $[BI]$.

2) $a/$ Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{11}{2}$.

$b/$ Montrer que $AJ=\sqrt{6}$ et que $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AI}=\frac{9}{2}$.

$c/$ Soit K le point d'intersection de (AJ) et (BI).

Montrer que $AK=\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

3) Soit l'ensemble $\mathscr{C}=\left\{M\in P \text{ tel que } \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MI}=\frac{11}{4}\right\}$.

$a/$ Vérifier que $A\in\mathscr{C}$.

$c/$ Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle que l'on précisera.