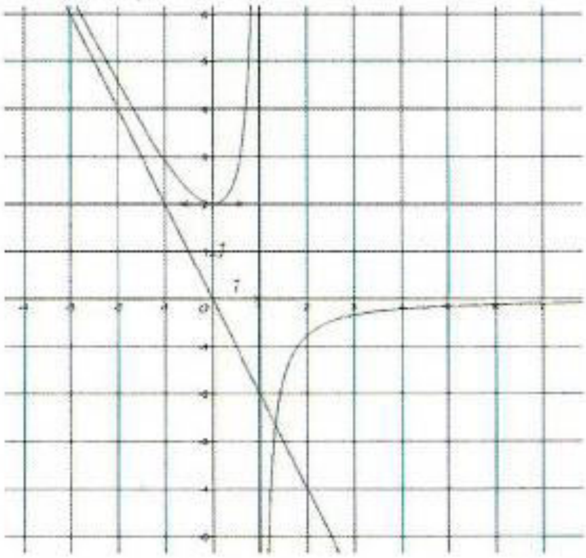
RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● propose par:H.Bouadila	Épreuve : **Mathématiques** 4eme **Sciences de l'informatique** Durée : 3h — Coefficient : 3 devoir de synthese1

Exercice n°1(4points)

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Les droites d'équations respectives $x=1$, $y=0$ et $y=-2x$ sont asymptotes à C.



1/ Par une lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a/ Donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

b/ Dresser le tableau de variation de *f*.

2/ Montrer que dans l'intervalle $[-1;0]$, l'équation $f(x)=2,5$ possède une solution unique notée α.

3/ On admet qu'il existe une constante réelle *m* telle que pour tout *x* élément de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a $f(x)=\sqrt{x^2+1}+mx-\dfrac{1}{x-1}$.

a/ En utilisant la valeur de $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ trouvée à la question **1/a/**, montrer que $m=-1$

b/ Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Exercice n°2(6points)

Partie I

La fonction f est définie sur]0;+∞[par f(x)=x-2+$\frac{1}{2}$Ln(x)

1) Etudier le sens de variations de f . Calculer les limites de f aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de f.

2) Montrer que l'équation f (x) = 0 admet une unique solution l dans l'intervalle]0;+∞[. Déterminer l'entier n tel que

l∈]n; n +1[

3) Déterminer le signe de f (x)

Partie II

La fonction g est définie sur $\mathcal{R}$ par :g (x)=$\begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 Ln(x) & si\ x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en +∞

2) Montrer que pour tout x > 0 , g'(x)=x f($\frac{1}{x}$)

3) Montrer que g($\frac{1}{l}$)=$\frac{1+4l}{8l^2}$ Dresser le tableau de variation de g.

4) Donner les équations des tangentes à la courbe C représentative de g aux points d'abscisses 1 et$\frac{1}{l}$

5) Calculer limite de $\frac{g(x)}{x}$ quand x tend vers 0^+ interpréter graphiquement cette limite.

6) Représenter succinctement G et ses tangentes dans un repère

orthonormé (O ;$\vec{i}$; $\vec{j}$)

Exercice n°3(5points)

(Dans tout cet exercice, les résultats concernant la population seront arrondis au million).
Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'Inde de 1951 à 1991.

année	1951	1961	1971	1981	1991
Rang x_i	1	2	3	4	5
Population y_i	361	439	548	683	846

On cherche à étudier l'évolution de la population y en fonction du rang x de l'année.

1) Représenter graphiquement le nuage de points (xi ; yi) dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 millions sur l'axe des ordonnées.
2) Le modèle étudié dans cette question sera appelée « droite de Mayer ».
   a) G1 désigne le point moyen des trois premiers points du nuage et G2 celui des deux derniers points. Déterminer les coordonnées de G1 et de G2.
   b) Déterminer l'équation réduite de (G1G2) sous la forme y = a x + b.
   c) Tracer la droite (G1G2) sur le graphique précédent.
   d) En utilisant cet ajustement, calculer la population de l'Inde que l'on pouvait prévoir pour 2001.

3) À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.
4) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire
   a) Tracer cette droite D sur le graphique précédent.
   b) En utilisant cet ajustement, calculer la population de l'Inde que l'on pouvait prévoir pour 2001.

__Exercice n°4__(5points)

1) a) démontrer qu'il existe un couple (u,v) d'entier relatifs tels que 19u+12v=1
   b) vérifier que pour un tel couple le nombre N=13x12v+6x19u on a
   $\begin{cases} N \equiv 13 (mod 19) \\ N \equiv 6 (mod 12) \end{cases}$
2) déterminer une solution (u_o, v_o) de 19u+12v=1 dans ℤxℤ
3) soit N_o= 13x12v_o+6x19u_o vérifier que pour tout N de ℤ on a
   $\begin{cases} N \equiv 13 (mod 19) \\ N \equiv 6 (mod 12) \end{cases}$ équivaut a $\begin{cases} N \equiv N_0 (mod 19) \\ N \equiv N_0 (mod 12) \end{cases}$
4) résoudre dans ℤxℤ l'équation 17x-13y=4
5) montrer que pour tout N de ℤ on a
   N≡18(mod221) équivaut a $\begin{cases} N \equiv 5 (mod 13) \\ N \equiv 1 (mod 17) \end{cases}$