

Lycée secondaire : IBN ROCHD Professeur : Tarek CHOKRY Année scolaire : 2018 / 2019	<u>Devoir de synthèse N° : 01</u>	Classe : 3 ^{ème} Maths Date : 04 / 12 / 2018 Durée : 02 h
---	-----------------------------------	--

N.B : Il sera tenu compte de la rédaction, l'organisation et la propreté de la copie.

EXERCICE 01 : (5 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Représenter, Δ , l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(r; \frac{\pi}{3})$ avec $r > 0$.
- 2) a) Construire A le point de l'ensemble Δ tel que : $OA = 2$.
 b) Déterminer les coordonnées polaires, puis cartésiennes du point A .
- 3) Soit B le point tel que OAB est un triangle direct, isocèle et rectangle en O . On note I le milieu de $[AB]$.
 a) Donner les coordonnées polaires des points B et I .
 b) Déduire leurs coordonnées cartésiennes.
- 4) Vérifier que $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$; En déduire $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 5) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $4 \sin(2x) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

EXERCICE 02 : (3 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 4x + m}{4 - x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} & \text{si } 1 < x < 2 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ où m est un réel.

- 1) a) Préciser le domaine de définition de f .
 b) Etudier la continuité de f en 2.
- 2) a) Déterminer la valeur du réel m pour que f soit prolongeable par continuité en -2 .
 b) Déduire $f(-2)$.
- 3) a) Pour la valeur trouvée de m , montrer que f est continue en 1.
 b) En déduire le domaine de continuité de f pour la même valeur de m .

EXERCICE 03 : (6 pts)

Soit $f(x) = 2 \cos(2x) - 1$ et $g(x) = 1 + \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x)$.

- 1) a) Calculer $f(\frac{\pi}{12})$ et $g(\frac{\pi}{12})$.
 b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x + \pi) - f(x + \frac{\pi}{6}) = 2$.
- 2) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = 1 + 2 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$.
 b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $g(x) = 0$.
- 3) a) Donner le domaine de définition D_h de $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
 b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = 2 \cos x \cdot [\cos x - \sqrt{3} \sin x]$.
 c) En déduire que pour tout $x \in D_h$ on a : $h(x) = \frac{1 + \sqrt{3} \tan x}{2}$.
- 4) a) Prouver que $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

- b) En s'aidant du résultat précédent montrer que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; En déduire que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
- c) Déterminer les coordonnées polaires du point : $A(-\sqrt{6} - \sqrt{2} ; \sqrt{6} - \sqrt{2})$.

EXERCICE 04 : (6 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct.

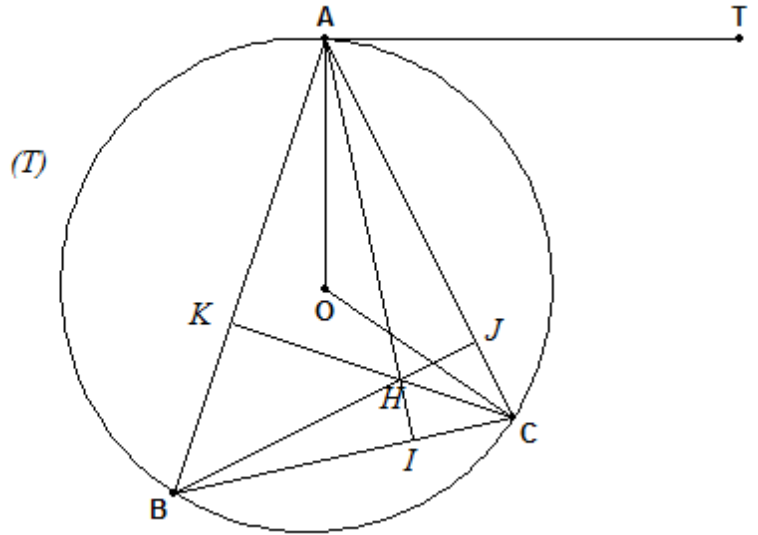
ABC est un triangle tel que :

$$(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{33\pi}{4} [2\pi]$$

et $(\widehat{BC, BA}) \equiv \frac{31\pi}{3} [2\pi]$. On désigne par (Γ) le cercle de centre O passant par A, B et C .

T est un point du plan tel que

$$(\widehat{AO, AT}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]. \quad \text{(Voir figure)}$$



- I) 1) a) Déterminer les mesures principales des angles orientés : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

b) Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AC})$.

- 2) Soit $(E) = \{M \in P \text{ tq: } (\widehat{MA, MC}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]\}$.

a) Vérifier que $B \in (E)$ puis déduire (E) .

b) Trouver l'ensemble des points N du plan tel que $(\widehat{NA, NC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

II) Soit H l'orthocentre du triangle ABC . On désigne par I, J et K les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C .

- 1) a) Vérifier que $(\widehat{AB, AI}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

b) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ puis déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC})$.

c) Déduire que les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AO})$ ont la même bissectrice.

- 2) a) Etablir que les points B, J, C et K sont situés sur un même cercle à déterminer.

b) Montrer alors que : $(\widehat{BC, BA}) \equiv (\widehat{AC, KJ}) [2\pi]$.

c) Déduire que $(\widehat{AC, KJ}) \equiv (\widehat{AC, AT}) [2\pi]$.

d) Montrer alors que les droites (JK) et (OA) sont perpendiculaires.